D I D A C T I C S O F M A T H E M A T I C S

No. 5-6 (9-10) 2009

Wiktor Ejsmont
(Wrocław)

EFEKTYWNOŚĆ NAUCZANIA WE WROCŁAWSKICH LICEACH

Abstract. The article focuses on measuring the effectiveness of education of the Polish language in secondary schools in Wrocław. In the first part of the article the author appropriately converts the data and explains the construction of models with random factors used by Aitkins and Longford. In the second part of article it applies those data to the proper models and draw conclusions from the results obtained.

Key words: school effectiveness, teaching, analysis of panel data.

1. Wstęp

Celem artykułu jest zbadanie efektywności nauczania we wrocławskich liceach. Główna część pracy bazuje na zastosowaniu modelu z czynnikami losowymi, przedstawionego przez Aitkina i Longforda w artykule *Statistical modelling issues in school effectiveness studies*. Modele wykorzystane przez tych autorów służą do analizy danych panelowych. W dokładny sposób opisuje je m.in. Baltagi w książce pt. *Econometric Analysis of Panel Data*.

Artykuł *Statistical modelling issues in school effectiveness studies* przedstawia sposoby badania efektywności kształcenia w amerykańskich szkołach za pomocą różnicy punktów pomiędzy wynikami egzaminów osiąganymi przez uczniów kończących szkołę a ilorazem inteligencji IQ mierzonym przed rozpoczęciem nauki w danej szkole. Mój artykuł bazuje tylko na modelu z losowymi efektami – rozpatrywanym jako model nr 5 przez Aitkina i Longforda. Badania natomiast oparte są na wynikach testów gimnazjalnych oraz na wynikach maturalnych. Dla lepszego zmierzenia jakości kształcenia w liceach wrocławskich przekształciłem dane uwzględniające różnice pomiędzy punktami gimnazjalnymi i maturalnymi. Istotę problemu wyjaśnię w dalszej części artykułu.

W mojej pracy przeanalizuje dwa typy danych. Pierwszy typ dotyczy części humanistycznej (język polski), drugi zaś części ścisłej (matematycznej). Na końcu połączę oba wyniki, dzięki którym uzyskam ranking kształcenia. Przeprowadzone analizy zilustrują także, które liceum cechuje najlepsza jakość kształcenia pod kątem humanistycznym, a które pod kątem matematycznym. Istotną część pracy stanowi również matematyczny opis sposobu estymacji modelu oraz wyjaśnienia definicji efektywności kształcenia przyjętej przez Aitkina i Longforda.

2. Dane rzeczywiste oraz oznaczenia

Zebrane dane opisują wyniki gimnazjalne oraz wyniki maturalne absolwentów wrocławskich liceów z lat 2007-2009. Dane zostały podzielone na dwie części, które będą analizowane osobno. Pierwsza część dotyczy wyników z humanistycznego egzaminu gimnazjalnego oraz z matury podstawowej z języka polskiego, druga część to egzamin gimnazjalny z części matematyczno-przyrodniczej oraz wyniki z matury rozszerzonej z matematyki[1]. Matura podstawowa z języka polskiego jest obowiązkowa, matura zaś z matematyki na poziomie rozszerzonym ma charakter fakultatywny. W konsekwencji liczba analizowanych liceów z danymi humanistycznymi jest dwukrotnie większa od liczby liceów, w których można wybrać liczną próbę uczniów zdających na maturze matematykę rozszerzoną. Każdy uczeń, który pisze maturę rozszerzoną, przystępuje wcześniej do egzaminu podstawowego z tego przedmiotu. Liczba uczniów przystępujących tylko do matury podstawowej z matematyki w latach 2007--2009 we wrocławskich liceach jest prawie trzykrotnie mniejsza od liczby uczniów, którzy zdawali maturę zarówno na poziomie rozszerzonym, jak i podstawowym. W LO III lub XIV liczba takich uczniów jest blisko trzydziestokrotnie mniejsza od liczby tych, którzy zdawali maturę na dwóch poziomach zaawansowania. Wyniki z matury rozszerzonej lepiej zobrazują efektywność kształcenia we wrocławskich liceach, gdyż program matury podstawowej z matematyki obejmuje tylko jej podstawy[2]. Świadczą o tym

[1] W dalszej części artykułu będę odwoływał się do tych danych za pomocą określenia wyników humanistycznych (model humanistyczny) oraz matematycznych (model matematyczny).

[2] Program z matematyki jest z roku na rok coraz uboższy, był wielokrotnie okrajany.

chociażby to, że zdecydowana większość uczniów zdających matematykę uczyniła to na poziomie zarówno podstawowym, jak i rozszerzonym.

Tabela 1. Zestawienie uczniów zdających maturę z języka polskiego

Szkoła	Liczba uczniów	Procent uczniów	Średni wynik gimnazjalny	Odchylenie standardowe – gimnazjum	Średni wynik maturalny	Odchylenie standardowe – matura
DZDZ	103	1,06	62,72	13,54	43,71	13,63
LO I	423	4,35	72,74	10,24	58,89	11,83
LO II	671	6,90	75,90	9,45	59,57	11,74
LO III	258	2,65	86,79	6,88	69,31	10,22
LO IV	489	5,03	74,35	11,06	60,73	12,75
LO IX	571	5,87	79,53	9,39	63,80	11,02
LO MUZ	70	0,72	74,54	10,70	61,64	12,67
LO S	70	0,72	72,57	10,64	53,97	13,60
LO SU	111	1,14	77,50	10,37	63,85	11,28
LO SP	80	0,82	71,60	12,65	55,58	12,72
LO V	264	2,72	83,29	7,76	70,06	12,05
LO VI	446	4,59	71,79	10,84	56,98	11,12
LO VII	790	8,13	82,91	7,97	65,77	11,11
LO VIII	482	4,96	79,32	9,37	61,54	11,10
LO X	592	6,09	75,69	10,37	60,33	11,16
LO XI	341	3,51	72,30	10,49	62,20	12,42
LO XII	554	5,70	83,45	9,09	64,93	10,83
LO XIII	542	5,58	78,38	10,02	61,99	11,18
LO XIV	363	3,73	84,64	8,48	68,46	10,64
LO XV	774	7,96	73,51	9,82	58,80	10,99
LO XVI	199	2,05	64,81	11,75	48,38	12,35
LO XVII	315	3,24	73,18	9,82	57,80	12,53
LO XVIII	277	2,85	70,44	10,26	55,38	13,13
LO XX	95	0,98	70,57	11,23	51,82	10,79
LO XXI	119	1,22	67,18	11,67	58,34	11,42
LO XXII	167	1,72	65,64	11,88	49,60	11,60
LO XXIV	238	2,45	71,31	11,82	56,76	13,15
LO XXIX	118	1,21	67,68	10,60	48,53	10,70
LO XXV	74	0,76	69,22	12,39	52,78	13,32
LO XXX	125	1,29	66,38	14,00	52,08	13,30
Suma końcowa	9721	100	76,12	11,39	60,53	12,66

Źródło: Okręgowa Komisja Egzaminacyjna we Wrocławiu.

Tabela 2. Zestawienie wyników uczniów zdających maturę rozszerzoną z matematyki

Szkoła	Liczba uczniów	Procent uczniów	Średni wynik gimnazjalny	Odchylenie standardowe – gimnazjum	Średni wynik maturalny	Odchylenie standardowe – matura
LO I	119	3,64	72,30	11,71	38,99	19,18
LO II	233	7,13	80,13	8,79	44,95	22,12
LO III	398	12,17	91,75	7,06	73,97	18,73
LO IV	105	3,21	77,10	10,68	48,91	21,87
LO IX	271	8,29	80,30	10,64	54,82	21,71
LO V	141	4,31	82,87	8,70	54,34	22,03
LO VI	81	2,48	75,65	11,88	38,22	20,45
LO VII	384	11,75	85,40	8,01	59,95	21,21
LO VIII	229	7,01	80,12	9,18	50,76	17,23
LO X	193	5,90	79,55	10,73	51,58	23,18
LO XII	321	9,82	83,93	8,13	60,26	19,61
LO XIII	258	7,89	79,37	9,88	51,56	20,81
LO XIV	284	8,69	88,06	9,05	71,13	20,93
LO XV	183	5,60	75,51	11,41	35,36	20,05
LO XVII	69	2,11	74,78	11,26	48,93	19,23
Suma końcowa	3269	100	82,40	10,68	55,86	23,28

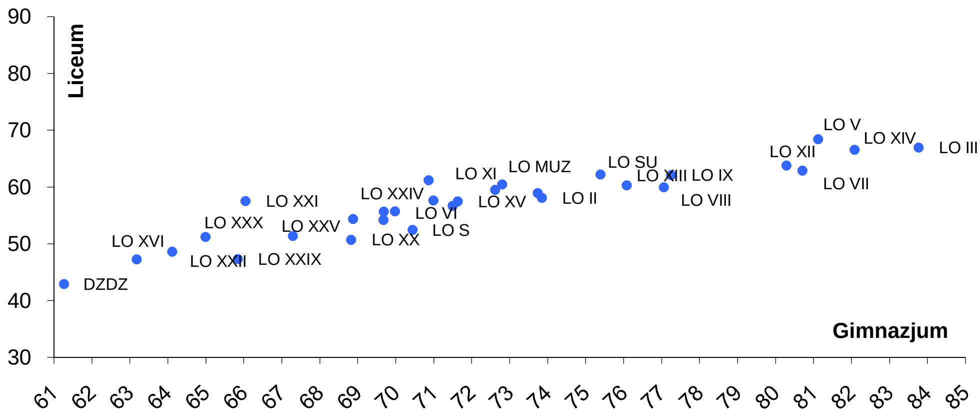
Źródło: Okręgowa Komisja Egzaminacyjna we Wrocławiu.

Wybrałem licea, w których posiadam dane przynajmniej 69 uczniów (sumarycznie z wszystkich trzech roczników). Tabele 1 i 2 nie opisują wszystkich uczniów z lat 2007-2009 zdających maturę, ponieważ dla części uczniów nie istnieje identyfikator, za pomocą którego można złączyć wyniki gimnazjalne i maturalne. Mimo to dane opisują zdecydowaną większość absolwentów wrocławskich liceów (około 80%). Powoduje to także pewne paradoksy, gdyż dla LO III znamy wyniki z matury podstawowej z języka polskiego dla 258 uczniów (jest ona obowiązkowa), z matury zaś rozszerzonej z matematyki – 398 (wybierana) w tych samych latach (jest tylko jeden taki przypadek).

Tabele zawierają skróty nazw szkół w następującej konwencji:

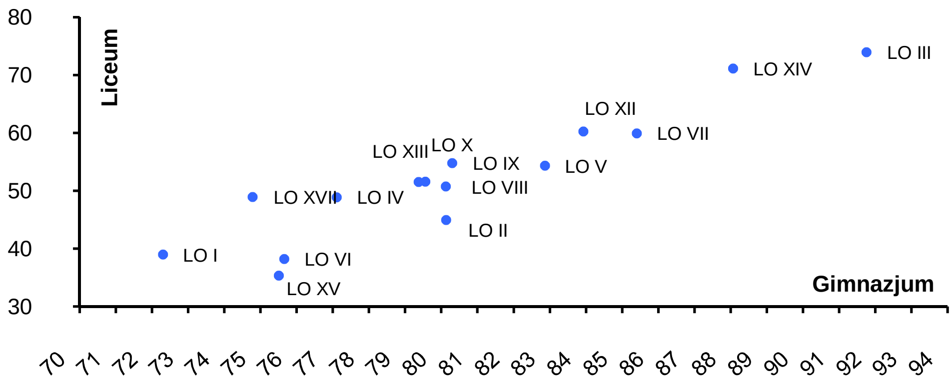
- LO + cyfra rzymska – liceum ogólnokształcące, którego numer jest wyznaczany przez cyfrę rzymską,
- DZDZ – Dolnośląski Zakład Doskonalenia Zawodowego (zespół szkół),
- LO MUZ – Ogólnokształcąca Szkoła Muzyczna II Stopnia,

- LO S – Prywatne Salezjańskie Liceum Ogólnokształcące,
- LO SP – Ogólnokształcąca Szkoła Sztuk Pięknych,
- LO SU – Liceum Ogólnokształcące Sióstr Urszulanek.



Uwaga: Wszystkie szkoły są zaznaczone (punkty), ale nie wszystkie są oznaczone ze względu na nieczytelność rysunku.

Rys. 1. Średnie wyniki gimnazjalne (część humanistyczna) i maturalne (język polski) dla poszczególnych szkół



Rys. 2. Średnie wyniki gimnazjalne (część matematyczno-przyrodnicza) i maturalne (matematyka) dla poszczególnych szkół

Zarówno punkty gimnazjalne, jak i maturalne są przeskalowane do poziomu 100 punktów, tzn. wynik danego ucznia (gimnazjalny i maturalny) został podzielony przez maksymalną liczbę punktów możliwych do zdobycia oraz pomnożony przez 100.

Rysunki 1 i 2 przedstawiają zależność pomiędzy średnimi wynikami egzaminów gimnazjalnych i maturalnych. Wyniki gimnazjalne poszczególnych szkół na poziomie zagregowanych średnich są *mocno skorelowane* (współczynnik korelacji liniowej Pearsona wynosi 0,92826 dla danych z tab. 1 oraz 0,927798 dla danych z tab. 2).

Tabela 1 przedstawia ogólne ujęcie wyników gimnazjalnych oraz maturalnych z części humanistycznej. Najmniejszym odchyleniem standardowym, na poziomie zarówno gimnazjalnym, jak i maturalnym, charakteryzuje się LO III. Świadczy to o bardzo równym poziomie kształcenia w tym liceum. Na poziomie gimnazjum drugie miejsce pod względem *rozproszenia* (odchylenie standardowe) zajmuje LO V, ale pod względem wyników maturalnych plasuje się dopiero na 18 pozycji. Należy wziąć pod uwagę fakt, iż odchylenia standardowe dla poszczególnych szkół nie różnią się istotnie na poziomie wyników maturalnych.

Tabela 2 ukazuje wyniki gimnazjalne oraz maturalne z przedmiotów ścisłych. Zauważmy, że średni wynik gimnazjalny z części matematyczno--przyrodniczej wypada trochę lepiej niż średni wynik z części humanistycznej. Odchylenie standardowe wyników maturalnych jest duże w porównaniu egzaminami z innych rozpatrywanych wyników egzaminów. Na poziomie wszystkich uczniów odchylenie standardowe wyników maturalnych wynosi 23,28 (jest większe od odchyleń w poszczególnych szkołach). Świadczy to o istotnym zróżnicowaniu wyników, zarówno w szkołach, jak i na poziomie wszystkich uczniów.

Wprowadzę teraz oznaczenia:

- x_{ij} liczba punktów gimnazjalnych uzyskanych przez i-tego ucznia w j-tej szkole,
- y_{ij} liczba punktów maturalnych uzyskanych przez i-tego ucznia w j-tej szkole,
- n_j liczba uczniów w szkole j,
- n liczba wszystkich uczniów, tzn. $n = n_1 + ... + n_k$
- k liczba szkół, tzn. $j \in \{1, \ldots, k\}$,
- $\bar{x}$ średni wynik gimnazjalny wszystkich uczniów,
- $\bar{y}$ średni wynik maturalny wszystkich uczniów,

- $\bar{x}_j$, $\bar{y}_j$ średni wynik odpowiednio gimnazjalny oraz maturalny na poziomie *j*-tej szkoły.

Rys. 3. Schemat mierzenia efektywności

Rysunek 3 przedstawia schemat mierzenia efektywności kształcenia. Zastosowany przeze mnie model mierzy przyrost (spadek) w oparciu przede wszystkim o różnicę pomiędzy wynikiem matury a wynikiem gimnazjum – wzór (16). Powoduje to problem, którego istotę wyjaśnię na poniższym przykładzie. Jeżeli dany uczeń uzyskał na teście gimnazjalnym 30 punktów, a na maturalnym 40 punktów, to jego przyrost wiedzy jest taki sam, jak ucznia, który w gimnazjum uzyskał wynik 90, na maturze zaś 100 punktów. Przyrost bezwzględny punktów w obu przypadkach jest równy 10. Nie można jednak mówić o identycznym przyroście wiedzy uczniów, ponieważ dużo trudniej jest zdobyć 100 punktów niż 40. Z tego powodu dane zostały przeskalowane, by uwzględniały początkową wiedzę danego ucznia (gimnazjalną). Przeskalujemy tylko wyniki maturalne, pozostawiając bez zmian wyniki gimnazjalne. Kieruję się zasadą, że należy dowartościować tych uczniów, którzy mieli lepsze wyniki matur, czyli w przedstawionym przykładzie jest to uczeń, który zdobył 100 punktów. To samo rozumowanie dotyczy spadku punktów w stosunku do wyniku gimnazjalnego. Przykładem jest osiągnięcie na maturze wyniku o 10 punktów mniejszego niż na egzaminie gimnazjalnym dwóch różnych uczniów, którzy zdobyli na egzaminie gimnazjalnym odpowiednio 50 i 80 punktów. Ten uczeń, który miał wynik gimnazjalny 80 punktów i potem na maturze 70 punktów, powinien być sklasyfikowany jako lepszy od tego, który uzyskał w gimnazjum 50 punktów.

Zaprezentowane rozumowanie jest powodem przeskalowania danych, które przedstawiam poniżej:

$$y'_{ij} = \begin{cases} x_{ij} + (y_{ij} - x_{ij})\, y_{ij}/100 & \text{o ile} \quad (y_{ij} - x_{ij}) \geq 0 \\ x_{ij} + (y_{ij} - x_{ij})(100 - y_{ij})/100 & \text{o ile} \quad (y_{ij} - x_{ij}) < 0 \end{cases}. \tag{1}$$

Tak zdefiniowane przekształcenie powoduje, iż przyrost wiedzy jest tym bardziej dowartościowany, im lepszy był wynik maturalny. Ten sam tok myślenia odnosi się do tych uczniów, których wynik maturalny obniżył się w stosunku do gimnazjalnego.

Dalsza część artykułu opiera się na dopasowaniu modeli do punktów przekształconych, tzn. postaci (x_{ij}, y'_{ij}). Oznaczenia średnich dotyczące y'_{ij} są analogiczne do oznaczeń średnich y_{ij} (tak na poziomie całej populacji, jak i szkoły).

3. Metodologia badań

Dane zaprezentowane w punkcie 1 nazywane są niezbilansowanymi danymi panelowymi. Panele niezbilansowane występują, gdy liczba obserwacji dla poszczególnych obiektów (szkół) jest różna, tzn. n_j. W przypadku równej liczby obserwacji mówi się o danych zbilansowanych. Najczęściej w literaturze modele te są stosowane do danych przekrojowo-czasowych, tzn. takich, których dany obiekt jest obserwowany w jakimś określonym czasie.

Model, który zastosuję, to model z czynnikami losowymi. W ekonometrii model ten zawdzięcza popularność artykułowi Balestry i Nerlove'a (1966), mówiącemu o popycie na gaz ziemny. Jeżeli populacja, którą chcemy opisać, nie jest jednorodna, należy uwzględnić ową niejednorodność w modelu. Jeśli elementy w próbie pochodzą z dużej populacji, lepiej założyć, że indywidualny efekt jednostkowy jest realizacją pewnej zmiennej losowej. W modelu tym występują dwa składniki losowe. Model z czynnikami losowymi znany jest też pod nazwą modelu komponentów wariancyjnych (*variance components model* – VC – lub *error component model*). Model ten jest postaci:

$$y'_{ij} = \alpha + \beta x_{ij} + \xi_j + e_{ij}. \tag{2}$$

Dla modelu zakłada się:

- e_{ij} zmienna losowa z rozkładu $N(0, \sigma^2)$,
- ξ_j zmienna losowa z rozkładu $N(0, \sigma_I^2)$ – interpretacja tego składnika modelu jest taka, że każdą szkołę możemy traktować jak zmienną losową z wariancja σ_I^2 oraz średnią α,
- składniki losowe pochodzące z różnych szkół i dla różnych uczniów są nieskorelowane,
- indywidualny składnik losowy ξ_j jest nieskorelowany z składnikiem losowym e_{ij}, tzn. $E(\xi_j, e_{is}) = 0$.

Z powyższych założeń otrzymujemy

$$\operatorname{var}(y'_{ij}) = \operatorname{var}(\xi_j + e_{ij}) = E(\xi_j + e_{ij})^2 - E^2(\xi_j + e_{ij}) =$$
$$= E(\xi_j^2 + 2\xi_j e_{ij} + e_{ij}^2) = \sigma_I^2 + \sigma^2, \tag{3}$$

$$\operatorname{cov}(y'_{ij}, y'_{pj}) = \operatorname{cov}((\xi_j + e_{ij}), (\xi_j + e_{pj})) = E(\xi_j^2 + \xi_j e_{ij} + \xi_j e_{pj} + e_{ij} e_{pj}) = \sigma_I^2, \tag{4}$$

$$\rho = cor(y'_{ij}, y'_{pj}) = \frac{\sigma_I^2}{\sigma_I^2 + \sigma^2}. \tag{5}$$

Współczynniki tak określonego modelu szacujemy za pomocą największej wiarygodności (np. M. Aitkin, N. Longford (1986)) lub uogólnioną metodą najmniejszych kwadratów (np. B. Baltagi (1995)). Estymator parametrów α oraz β jest postaci:

$$\begin{bmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\beta} \end{bmatrix} = (X^T V^{-1} X)^{-1} X^T V^{-1} y, \tag{6}$$

gdzie:

$$X^T = \begin{bmatrix} 1, & \dots, & 1 & ,\dots, & 1 & ,\dots, & 1 \\ x_{1,1}, & \dots, & 1 & ,\dots, & x_{1,k} & ,\dots, & x_{k,n_k} \end{bmatrix},$$

$$y^T = \begin{bmatrix} y'_{1,1} & ,\dots, & y'_{n_1,} & ,\dots, & y'_{k,1} & y'_{k,n_k} \end{bmatrix}$$

oraz V jest macierzą kowariancji wektora y. Zgodnie z założeniami do modelu macierz ta jest postaci:

$$V = \begin{bmatrix} \Omega_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \Omega_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \Omega_k \end{bmatrix},$$

gdzie

$$\Omega_j = \begin{bmatrix} \sigma^2 + \sigma_I^2 & \sigma_I^2 & \dots & \sigma_I^2 \\ \sigma_I^2 & \sigma^2 + \sigma_I^2 & \cdots & \sigma_I^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_I^2 & \sigma_I^2 & \dots & \sigma^2 + \sigma_I^2 \end{bmatrix}_{n_j \times n_j}.$$

Po uproszczeniach wzoru (6), zastosowanych np. przez Aitkina oraz Longforda (M. Aitkin, N. Longford (1986)), otrzymujemy

$$\begin{bmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\beta} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{k} w_j & \sum_{j=1}^{k} w_j \bar{x}_j \\ \sum_{j=1}^{k} w_j \bar{x}_j & \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}(x_{ij}-\bar{x}_j)^2 + \sum_{j=1}^{k} w_j \bar{x}_j^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{k} w_j \bar{y}'_j \\ \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}(y'_{ij}-\bar{y}'_j)(x_{ij}-\bar{x}_j) + \sum_{j=1}^{k} w_j \bar{x}_j \bar{y}'_j \end{bmatrix}$$

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}(y'_{ij}-\bar{y}'_j)(x_{ij}-\bar{x}_j) + A^*_{xy}}{\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}(x_{ij}-\bar{x}_j)^2 + A^*_{xx}}, \qquad (7)$$

gdzie:

$$A^*_{xx} = \sum_{j=1}^{k} w_j (\bar{x}_j - \bar{x}^*)^2 \quad \text{oraz} \quad A^*_{xy} = \sum_{j=1}^{k} w_j (\bar{x}_j - \bar{x}^*)(\bar{y}'_j - \bar{y}'^*), \qquad (8)$$

$$\bar{x}^* = \sum_{j=1}^{k} w_j \bar{x}_j \Big/ \sum_{j=1}^{k} w_j \quad \text{oraz} \quad \bar{y}'^* = \sum_{j=1}^{k} w_j \bar{y}'_j \Big/ \sum_{j=1}^{k} w_j, \qquad (9)$$

$$w_j = n_j \sigma^2 / (\sigma^2 + n_j \sigma_I^2) \qquad (10)$$

oraz

$$\text{var}(\hat{\beta}) = \frac{\sigma^2 + \sigma_I^2}{\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}(x_{ij}-\bar{x}_j)^2 + A^*_{xx}}. \qquad (11)$$

Ze wzoru (7) oraz po przekształceniach otrzymamy:

1. Dla $\sigma_I^2 = 0$ $(w_j = n_j)$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}(y'_{ij} - \bar{y}'_j)(x_{ij} - \bar{x}_j) + \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}(\bar{y}'_j - \bar{y}')(\bar{x}_j - \bar{x})}{\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}(x_{ij} - \bar{x}_j)^2 + \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}(\bar{x}_j - \bar{x})^2} = \frac{\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}(y'_{ij} - \bar{y}')(x_{ij} - \bar{x})}{\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}(x_{ij} - \bar{x})^2} . \tag{12}$$

Otrzymamy współczynnik nachylenia taki sam, jak za pomocą prostej regresji liniowej, dopasowany do wszystkich danych (bez rozróżniania ze względu na szkołę). Jeżeli y'_{ij} nie są skorelowane na poziomie danej szkoły, wówczas model ten spełnia założenia klasycznej regresji liniowej.

2. Jeżeli σ_I^2 jest duże w stosunku do σ^2, tzn. $\sigma^2 / \sigma_I^2 \to 0$, wówczas w_j zbiegają do zera istotnie:

$$w_j = n_j (\sigma / \sigma_I)^2 / ((\sigma / \sigma_I)^2 + n_j) \xrightarrow{(\sigma/\sigma_I)^2 \to 0} 0 .$$

To zaś powoduje, że wielkości A_{xx}^* oraz A_{xy}^* zbiegają do zera. Ze wzoru (7) otrzymujemy:

$$\hat{\beta}_2 = \frac{\sum_{j=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_j}(y'_{ij} - \bar{y}'_j)(x_{ij} - \bar{x}_j)}{\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}(x_{ij} - \bar{x}_j)^2} . \tag{13}$$

Przejdziemy teraz do zdefiniowania efektywności uczenia (zastosowanych przez Aitkina i Longforda). Zestawienie szkół odbywa się za pomocą porównania wartości oczekiwanej składnika losowego ξ_j (wzór 2). Ponieważ składniki σ^2 oraz σ_I^2 są znane przed oszacowaniem modelu (w dalszej części artykułu zostanie przedstawiona procedura ich estymacji), więc możemy tę informację wykorzystać jako informację *a priori*. Wyznaczymy rozkład warunkowej zmiennej losowej ξ_j pod warunkiem $\bar{y}'_j$ (podejście bayesowskie). Ze wzoru (2) średnia na poziomie *j*-tej szkoły wyraża się wzorem:

$$\overline{y}'_j = \alpha + \beta \overline{x}_j + \xi_j + \overline{e}_j . \tag{14}$$

Przy poczynionych założeniach $\overline{y}'_j$ ma rozkład normalny

$$N(\alpha + \beta \overline{x}_j , \sigma_I^2 + \sigma^2 / n_j) .$$

Ten rozkład przyjmiemy jako rozkład *a priori*. Ponieważ ξ_j jest zmienną losową z rozkładu $N(0, \sigma_I^2)$, więc rozkład warunkowy $f(\xi_j / \overline{y}'_j)$ też będzie rozkładem normalnym.

Uwaga. Znany jest następujący fakt z rachunku prawdopodobieństwa. Jeżeli zmienne losowe

$$X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2) \quad \text{i} \quad X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$$

oraz

$$\rho_{1,2} = cor(X_1, X_2) ,$$

to rozkład warunkowy X_1 / X_2 jest postaci

$$N\left(\mu_1 + \rho_{1,2} \frac{\sigma_1}{\sigma_2} (X_2 - \mu_2), \sigma_1^2 (1 - \rho_{1,2}^2) \right).$$

Stąd uwzględniając fakt

$$\rho' = cor(\xi_j , \overline{y}_j) = \sigma_I^2 / (\sigma_I \sqrt{\sigma_I^2 + \sigma^2 / n_j}) ,$$

mamy: $f(\xi_j / \overline{y}'_j)$ ma rozkład normalny w postaci:

$$N\left(\rho' \frac{\sigma_I}{\sqrt{\sigma_I^2 + \sigma^2 / n_j}} (\overline{y}'_j - \alpha - \beta \overline{x}_j), \ \sigma_I^2 (1 - \rho'^2) \right),$$

co po nieskomplikowanych uproszczeniach daje

$$N\left(\rho n_j^* (\overline{y}'_j - \alpha - \beta \overline{x}_j), n_j^* (1 - \rho) \sigma_I^2 / n_j \right), \tag{15}$$

gdzie

$$n_j^* = w_j / (1 - \rho) .$$

Porównanie szkół będzie się opierało na porównaniu wartości średnich z rozkładu warunkowego zadanego wzorem (15). Stąd efekt kształcenia definiujemy w następującej postaci:

$$e_j = \hat{\rho} n_j^* (\bar{y}'_j - \hat{\alpha} - \hat{\beta}\bar{x}_j). \tag{16}$$

Jeśli znalibyśmy wariancje obu części składnika losowego modelu, bylibyśmy w stanie przeprowadzić estymację parametrów α oraz β. Jednak w praktyce σ^2 oraz σ_I^2 nie są znane. Konieczne jest więc oszacowanie ich wartości. W literaturze możemy spotkać wiele sposobów estymacji tych parametrów (np. B. Baltagi (1995) przedstawia cztery różne sposoby). Aby uzyskać ocenę wariancji σ^2, można użyć estymatora postaci:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j} (y'_{ij} - \hat{\alpha}_j - \hat{\beta}_2 x_{ij})^2}{n-k-1}, \tag{17}$$

gdzie $\hat{\beta}_2$ jest opisany wzorem (13) oraz

$$\hat{\alpha}_j = \bar{y}'_j - \hat{\beta}_2 \bar{x}_j. \tag{18}$$

Wyjaśnię ideę konstrukcji powyższego estymatora. Odejmując stronami równania zapisane wzorami (2) i (14), otrzymuję

$$y'_{ij} - \bar{y}'_j = \beta(x_{ij} - \bar{x}_{ij}) + e_{ij} - \bar{e}_j. \tag{19}$$

Szacując współczynnik β metodą najmniejszych kwadratów, otrzymamy współczynnik zapisany we wzorze (13). Metodę najmniejszych kwadratów zastosowaliśmy, gdyż reszty mają rozkład normalny ze średnią zero oraz wariancją

$$\mathrm{var}(e_{ij} - \bar{e}_j) = \sigma^2 (n_j - 1)/n_j \ (\approx \sigma^2).$$

Stąd jeżeli wariancje składnika losowego obliczymy jako drugi moment centralny, otrzymamy:

$$E\frac{1}{n_j}\sum_{i=1}^{n_j}(e_{ij} - \bar{e}_j)^2 = \sigma^2 \frac{(n_j - 1)}{n_j}.$$

Zastępując odpowiednie wyrażenia ich estymatorami, mamy

$$(n_j - 1)\hat{\sigma}^2 = \sum_{i'=1}^{n_j}(\hat{e}_{ij} - \bar{\hat{e}}_j)^2.$$

Dla k szkół jest k takich estymatorów. Sumując ostatnie równanie (po wszystkich szkołach j od 1 do k), otrzymujemy:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{j=1}^{k}\sum_{i'=1}^{n_j}(\hat{e}_{ij} - \overline{\hat{e}}_j)^2}{n-k} \quad . \tag{20}$$

Ze wzoru (19) widzimy, że

$$(\hat{e}_{ij} - \overline{\hat{e}}_j)^2 = y'_{ij} - \overline{y}'_j - \hat{\beta}_2(x_{ij} - \overline{x}_{ij}) = y'_{ij} - \hat{\alpha}_j - \hat{\beta}_2 x_{ij} \,.$$

Wstawiając to równanie do wzoru (20) oraz biorąc poprawkę na liczbę szacowanych parametrów, otrzymujemy estymator opisany wzorem (17). Mówiąc o liczbie szacowanych parametrów, mam na myśli $\hat{\beta}_2$ oraz $\hat{\alpha}_j$ $j \in \{1, \ldots, k\}$, co wyjaśnia skąd we wzorze (17) jest $n-k-1$.

Przejdźmy do oszacowania σ_I^2. Ze wzoru (2) widzimy, że

$$y'_{ij} - \alpha - \beta x_{ij} = \xi_j + e_{ij} \,,$$

stąd mamy

$$\mathrm{var}(y'_{ij} - \alpha - \beta x_{ij}) = \sigma^2 + \sigma_I^2 \,.$$

Jako ocenę estymatora wariancji całkowitej modelu (2) możemy przyjąć wariancje modelu klasycznej regresji linowej (dopasowane do wszystkich danych). Zapisana powyżej idea sprowadza się do wzoru:

$$\hat{\sigma}_I^2 = \frac{\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}(y'_{ij} - \hat{\alpha}' - \hat{\beta}_1 x_{ij})^2}{n-2} - \hat{\sigma}^2 \,, \tag{21}$$

gdzie $\hat{\beta}_1$ jest opisany wzorem (12), zaś $\hat{\alpha}' = \overline{y}' - \hat{\beta}_1 \overline{x}$.

W celu przeprowadzenia testu, czy uzyskane efekty losowe są istotne, użyję testu Breuscha-Pagana (np. B. Baltagi (1995)). Jest to test mnożników Lagrange'a, w którym stawiam hipotezy:

$$H_0\colon\ \sigma_I^2 = 0 \,.$$

Hipoteza alternatywna:

$$\sigma_I^2 \neq 0 \,.$$

Testuję za pomocą statystyki:

$$LM = \frac{\left(\sum_{j=1}^{k} n_j\right)^2}{\left(2\sum_{j=1}^{k} n_j(n_j - 1)\right)} \left[\frac{\sum_{j=1}^{k}\left(\sum_{i=1}^{n_j} e'_{ij}\right)^2}{\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j} e'^2_{ij}} - 1\right]^2 \sim \chi^2(1), \qquad (22)$$

gdzie e'_{ij} są to reszty otrzymane w wyniku zastosowania metody MNK do wszystkich danych (niezależnie od szkół). Powyższy wzór mówi, że statystyka testowa *LM* ma asymptotyczny rozkład chi-kwadrat (przy założeniu hipotezy zerowej) z jednym stopniem swobody. Hipotezę zerową odrzucamy, jeżeli wartość statystyki *LM* należy do prawostronnego obszaru krytycznego.

Tabela 3. Podstawowe charakterystyki statystyczne modeli

Charakterystyki statystyczne	Model dla części humanistycznej	Model dla części matematycznej
Współczynnik korelacji (Pearsona)	0,783321	0,647615
σ^2	49,932631	245,5981801
σ_I^2	4,229742506	24,02437768
ρ	0,0780937	0,089104
p-value normalność	> 0,01	> 0,01
Współczynnik beta	0,735787897	1,101871488
Odchylenie standardowe beta	0,006555	0,030512165
Współczynnik alfa	12,45317276	–25,20932746
LM – *p*-value	< 0,01	< 0,01

Źródło: obliczenia własne za pomocą programu Excel oraz Statistica.

W tej części artykułu przedstawię modele dopasowane do danych. Tabela 3 prezentuje główne charakterystyki statystyczne do oszacowanych modeli. Otrzymane modele są dopasowane pod względem normalności reszt. Współczynniki nachylenia $\hat{\beta}$ charakteryzują się małym odchyleniem standardowym. Oszacowane wartości testu LM wskazują na to, że σ_I^2 jest statystycznie istotny na poziomie istotności 0,01. Zasadne jest więc stosowanie modelu efektów losowych (związanych z σ_I^2). Zauważmy, że w obu modelach ρ jest na podobnym poziomie 0,08. Wyniki gimnazjalne oraz maturalne (przeskalowane, wzór (1)), są mocniej (dodatnio) skorelowane w przypadku danych humanistycznych, oraz charakteryzują się mniejsza wariancją.

4. Zakończenie

Tabela 4 przedstawia oszacowane efekty kształcenia zapisane wzorem (16) (dla dwóch typów danych, jakie są rozpatrywane). Model ważony przedstawia ważony efekt kształcenia[3]. Zsumowanie z wagami 0,5 ma na celu zbadanie ogólnej efektywności kształcenia przez dane liceum. W celu porównania przedstawiam ranking sporządzony przez „Gazetę Wrocławską", opublikowany 11.11.2008 r. (tylko tych liceów, które stanowią część wspólną).

Pod względem humanistycznym w jakości kształcenia najwyższej sklasyfikowane zostało LO V. Przewaga nad drugim w rankingu humanistycznym LO III jest znacząca, wynosi około 0,7. Na trzeciej pozycji uplasowało się LO XIV. Zdecydowanie najgorzej w rankingu humanistycznym wypada LO DZDZ (co jest całkowicie zgodne z rankingiem zaprezentowanym przez „Gazetę Wrocławską").

Pod kątem matematycznym najlepiej wypadło LO XIV, aczkolwiek należy podkreślić, że przewaga nad LO III jest minimalna (około 0,05). Ponadto istnieje istotna przewaga tych dwóch liceów nad pozostałymi. Widzimy, że otrzymane efektywności kształcenia dla tych szkół plasują się na poziomie 9 podczas, gdy trzecie LO XII na poziomie 4,54 oraz czwarte LO VII na poziomie 2,89. Najgorszym liceum w tym rankingu jest LO XV. Zauważmy również, że lider poprzedniego rankingu zajął dziewiątą pozycję.

Model ważony, który uśrednia wyniki otrzymane modelem humanistycznym oraz matematycznym, minimalnie lepiej sklasyfikował LO III (pierwsza pozycja) nad LO XIV (druga pozycja). W porównaniu z rankingiem „Gazety Wrocławskiej" jest tylko zamianą pierwszych dwóch pozycji. Dobry wynik matematyczny LO XII przyczynił się do uzyskania trzeciej pozycji (liceum to w modelu humanistycznym było sklasyfikowane na siódmej pozycji), co stanowi wyższą lokatę niż w rankingu gazety. Czwarte miejsce zajęło LO VII, co oznacza skok o jedną pozycję (ranking gazety). LO V uplasowało się na piątej pozycji, co w konfrontacji z wynikami gazety daje wynik o dwie pozycje niższy. Należy jednak podkreślić dobre wyniki kształcenia języka polskiego w tym liceum. Najgorzej w modelu ważonym wypada LO XV. Taką pozycję „zawdzięcza" przede wszystkim słabym wynikom matematycznym. Miejsce tego liceum jest bardzo zbliżone do tego zaprezentowanego przez gazetę (szesnasta).

[3] Dla modelu humanistycznego efekt kształcenia został przemnożony przez 0,5 i dodany do efektu kształcenia modelu matematycznego przemnożonego również przez 0,5.

Tabela 4. Estymowane średnie reszty wraz z rankingiem szkół

Szkoła	Model humanistyczny		Model matematyczny		Model ważony		Gazeta Wrocławska
	efekt kształcenia	ran-king	efekt kształcenia	ran-king	efekt ważony	ran-king	ranking
LO DZDZ	–7,13058	30					18
LO I	0,49078	15	–4,99197	12	–2,250592224	12	-
LO II	0,16178	17	–6,26768	13	–3,052951901	13	9
LO III	4,21100	2	8,90734	2	6,559167862	1	2
LO IV	1,29308	11	–0,09511	10	0,598984366	8	12
LO IX	2,15286	8	2,10147	5	2,127161722	6	6
LO MUZ	1,63470	9					-
LO S	–2,45296	25					11
LO SU	2,33785	6					10
LO SP	–1,12202	21					-
LO V	4,95969	1	0,02920	9	2,49444747	5	3
LO VI	–0,41671	18	–8,78696	14	–4,601837306	14	15
LO VII	2,78966	4	2,89722	4	2,843442089	4	5
LO VIII	0,93236	13	0,24174	8	0,587052653	9	7
LO X	0,86091	14	–0,36611	11	0,247397767	11	13
LO XI	2,45258	5					14
LO XII	2,28818	7	4,54787	3	3,418025937	3	8
LO XIII	1,36889	10	0,44062	7	0,904756136	7	4
LO XIV	4,12974	3	8,95804	1	6,543894496	2	1
LO XV	0,47235	16	–11,53751	15	–5,532578953	15	16
LO XVI	–4,26799	28					-
LO XVII	–0,43397	19	1,13856	6	0,352297459	10	-
LO XVIII	–1,29704	22					-
LO XX	–3,14557	26					-
LO XXI	1,16856	12					-
LO XXII	–3,62337	27					-
LO XXIV	–0,56763	20					12
LO XXIX	–4,79270	29					17
LO XXV	–2,30033	24					-
LO XXX	–2,15412	23					-

Źródło: obliczenia własne za pomocą programu Excel.

Przeprowadzone analizy ukazują efektywność kształcenia zarówno z matematyki, jak i z języka polskiego. LO XIV jest uznawane za najlepsze wrocławskie liceum dzięki osiągnięciom z przedmiotów ścisłych. W rankingu organizowanym przez „Gazetę Wrocławską” istotny wpływ mają również indywidualne osiągnięcia uczniów, np. na olimpiadach przedmiotowych.

Matematyka jako przedmiot obowiązkowy pojawiła się na maturze w 2010 roku. Bez wątpienia teraz efektywność kształcenia będziemy mogli lepiej zamodelować. W moim rankingu z część matematycznej badałem tylko pewien podzbiór uczniów. Zazwyczaj maturę z matematyki zdają ci uczniowie, którzy „lubią matematykę”. Zauważmy, że z rys. 2 wynika, że ci uczniowie, którzy mają gorsze wyniki wejściowe (gimnazjalne), osiągają słabsze wyniki na maturze (na poziomie średnich szkół). Stąd wyciągam wnioski, iż uczeń „lubiący matematykę” wcale nie musi uzyskać wysokiego wyniku na maturze. A więc to szkoły mają istotny wpływ na końcowy rezultat danego ucznia na maturze z matematyki. W związku z powyższym uważam, **że uwzględniając wiedzę, jaką dysponujemy w obecnym czasie**, wykonane badania z części matematycznej wiarygodnie modelują efektywność kształcenia matematyki.

Literatura

M. Aitkin, N. Longford (1986). *Statistical Modelling Issues in School Effectiveness Studies. Journal of the Royal Statistical Society* Vol. 149. No. 1. Pp. 1-43.

M. Aitkin, D. Anderson, J. Hinde (1981). *Statistical modelling of data on teaching styles.* Statistic Society. Vol. 144. Pp. 419-461.

P. Balestra, M. Nerlove (1966). *Pooling Cross Section and Time Series Data in the Estimation of a Dynamic Model: The Demand for Natural Gas***.** *Econometrica*, Vol. 34. No. 3. Pp. 585-612.

B. Baltagi (1995). *Econometric Analysis of Panel Data*. Willey.

A. Dempster, D. Rubin, R. Tsutakawa (1981). *Estimation in Covariance Components Models*. Journal of the American Statistical Association Vol. 76. No. 374. Pp. 341-353.

C. Hasio (1999). *Analysis of Panel Data*. Cambridge University Press.

J. Jakubowski, R. Sztencel (2004). *Wstęp do teorii prawdopodobieństwa.* SCRIPT .

N. Laird (1982). *Computation of variance components using the em algorithm*. Journal of Statistical Computation and Simulation, Vol. 14. No. 3. Pp. 295-303.

D. Lindley, A. Smith (1972). *Bayes Estimates for the Linear Model*. Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological). Vol. 34. No. 1. Pp. 1-4.

D. Marks, K. Fogelman and other (general discussion) (1984). *Assessment of Examination Performance in Different Types of Schools. Journal of the Royal Statistical Society.* Vol. 147. No. 4. Pp. 569-581.