D I D A C T I C S O F M A T H E M A T I C S

No. 5-6 (9-10) 2009

Jan Florek
(Wrocław)

RÓWNANIA CAUCHY'EGO-RIEMANNA I PRZEKSZTAŁCENIA KONFOREMNE

Abstract. We consider relations between the existence of a complex derivative for a complex function *f* and the existence of a tangent function $L(z) = az + b\overline{z}$ to *f*, which preserves angles in the point 0, as well as relations with the Cauchy-Riemann equations. We discuss also properties of some conformal maps on the plane.

Key words: complex derivative, Cauchy-Riemann equations, conformal map, exponential function, homographic function.

1. Niech u będzie funkcją rzeczywistą dwóch zmiennych rzeczywistych określoną w otoczeniu punktu (x_0, y_0). Mówimy, że funkcja u ma *pochodną zupełną* w punkcie (x_0, y_0) (S. Saks, A. Zygmund (1959), rozdział I; B.W. Szabat (1974), rozdział I; W. Rudin (1986), rozdział 8; F. Leja (1977), rozdział IV), jeżeli istnieje para liczb rzeczywistych (α, β) taka, że funkcje

$$U(x, y) = u(x + x_0, y + y_0) - u(x_0, y_0)$$

oraz

$$L(x, y) = \alpha x + \beta y$$

są styczne w punkcie (0, 0):

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{U(x,y) - L(x,y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0\,.$$

Para (α, β), o ile istnieje, wyznaczona jest jednoznacznie i nazywa się gradientem

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)\right)$$

funkcji u w punkcie (x_0, y_0).

Każdą funkcję zespoloną

$$f(x+iy) = u(x+iy) + iv(x+iy)$$

możemy traktować jako funkcję wektorową

$$f(x, y) = \big(u(x, y), v(x, y)\big)$$

dwóch zmiennych rzeczywistych o wartościach w R^2. Powstaje następujące pytanie: Jaką własność ma funkcja zespolona f w punkcie $z_0 = x_0 + iy_0$, jeżeli odpowiadające jej funkcje rzeczywiste u oraz v mają pochodne zupełne w punkcie (x_0, y_0)? Odpowiedź jest następująca: Funkcja zespolona f ma *słabą pochodną zespoloną* w punkcie z_0 (B.W. Szabat (1974), rozdział I; W. Rudin (1986), rozdział 11; F. Leja (1977), rozdział IV), czyli istnieje para liczb zespolonych (a, b) taka, że funkcje

$$F(z) = f(z+z_0) - f(z_0)$$

oraz

$$L(z) = az + b\bar{z}$$

są styczne w punkcie 0:

$$\lim_{z\to 0}\frac{F(z) - L(z)}{z} = 0 .$$

Para (a, b), o ile istnieje, jest wyznaczona jednoznacznie i nazywa się gradientem

$$\left(\frac{\partial f}{\partial z}(z_0), \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0)\right)$$

funkcji zespolonej f w punkcie z_0. Ponadto mamy następującą zależność między gradientem funkcji f a gradientami funkcji u i v:

$$\frac{\partial f}{\partial z}(z_0) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)(x_0, \ y_0) + \frac{i}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) \ (x_0, y_0),$$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)(x_0,y_0)+\frac{i}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)\ (x_0,y_0).$$

2. Niech f będzie funkcją zespoloną określoną w otoczeniu punktu z_0. Mówimy, że funkcja f ma *pochodną zespoloną* w punkcie z_0 (S. Saks, A. Zygmund (1959), rozdział V; B.W. Szabat (1974), rozdział I; W. Rudin (1986), rozdział 10; F. Leja (1977), rozdział IV), jeżeli istnieje liczba zespolona a taka, że funkcje

$$F(z)=f(z+z_0)-f(z_0)$$

oraz

$$L(z)=az$$

są styczne w punkcie 0. Liczba a wyznaczona jest jednoznacznie i nazywa się pochodną $f'(z_0)$ funkcji zespolonej f w punkcie z_0.

Analizując zależności między gradientem funkcji zespolonej $f = u + iv$ a gradientami funkcji rzeczywistych u i v, łatwo zauważyć, że następujące warunki są równoważne:

(1) funkcja f ma pochodną zespoloną w punkcie z_0,

(2) funkcja f ma słabą pochodną zespoloną w punkcie z_0 oraz

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0)=0,$$

(3) funkcje u, v mają pochodne zupełne w punkcie (x_0, y_0) oraz spełnione są równania Cauchy'ego-Riemanna:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)=\frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)=-\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0).$$

3. Zauważmy, że jeśli równania Cauchy'ego-Riemanna zapiszemy w postaci macierzowej, to uderzające jest podobieństwo otrzymanej macierzy do macierzy obrotu płaszczyzny wokół środka układu współrzędnych. Zauważmy również, że niezerowe przekształcenie liniowe $L(z) = az$ jest złożeniem obrotu o kąt $\arg(a)$ wokół punktu 0 i podobieństwa o skali $|a|$ i środku 0. Sugeruje to, że funkcja f, mająca niezerową pochodną w punkcie

z_0, *zachowuje kąty* w tym punkcie (S. Saks, A. Zygmund (1959), rozdział I; B.W. Szabat (1974), rozdział I; W. Rudin (1986), rozdział 14; F. Leja (1977), rozdział IV): dla dwu dowolnych promieni P i P', wychodzących z punktu z_0, kąt, który tworzą ich obrazy $f(P)$ i $f(P')$ w punkcie $f(z_0)$, jest taki sam, jak kąt między promieniami P i P', zarówno pod względem miary, jak i orientacji. Bardziej precyzyjnie, niech γ: $[\alpha, \beta] \to C$ będzie drogą taką, że $\gamma(\alpha) = z_0$. Funkcja f odwzorowuje drogę γ na drogę $\gamma^* = f \circ \gamma$ taką, że $\gamma^*(\alpha) = f(z_0)$. Jeżeli $f'(z_0) \neq 0$, to spełnione są następujące implikacje:

a) Jeżeli θ' i θ^* są kątami nachylenia do osi rzeczywistych stycznych do γ i γ^* w punktach z_0 i $f(z_0)$, to

$$\theta^* - \theta = \arg f'(z_0).$$

b) Jeżeli $S(t)$ i $S^*(t)$ i są długościami łuku γ i γ^*, które odpowiadają odcinkowi $[\alpha, t]$, to

$$\lim_{t\to 0} \frac{S^*(t)}{S(t)} = \left| f'(z_0) \right|.$$

Rozważmy dla przykładu funkcję $f(z) = z^2$ o pochodnej $f'(z) = 2z$. Funkcja ta odwzorowuje siatkę współrzędnych biegunowych na siatkę współrzędnych biegunowych. A więc kąty proste wyznaczone przez siatkę zostały zachowane w każdym punkcie $z \neq 0$. Zauważmy również, że obrazem łuku o długości s (leżącego na półokręgu o środku 0 i promieniu r) jest łuk o długości $2rs$ (leżący na okręgu o środku 0 i promieniu r^2).

Pokażemy teraz, że funkcja zespolona ma w danym punkcie niezerową pochodną zespoloną, wtedy i tylko wtedy gdy ma słabą pochodną zespoloną oraz gdy przekształcenie styczne $L(z) = az + b\overline{z}$ zachowuje kąty w punkcie 0. W tym celu wystarczy udowodnić następujące twierdzenie.

Twierdzenie. *Przekształcenie*

$$L(z) = az + b\overline{z}$$

zachowuje kąty w punkcie $0 \Leftrightarrow a \neq 0 \wedge b = 0$.

Dowód. Zauważmy najpierw, że przekształcenie

$$L(z) = az + b\overline{z}$$

zachowuje kąty w punkcie 0, jeśli

$$L(c) \neq 0 \quad \text{dla} \quad c \neq 0,$$

$$\arg L(c) - \arg L(1) = \arg c \quad \text{dla} \quad c \neq 0 .$$

Wtedy dla każdej liczby zespolonej c takiej, że $|c| = 1$, spełnione są następujące równoważności:

$$\arg L(c) = \arg L(1) + \arg c \Leftrightarrow \frac{L(c)}{|L(c)|} = \frac{L(1)c}{|L(1)c|} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{ac + b\overline{c}}{|ac + b\overline{c}|} = \frac{ac + bc}{|ac + bc|} \Leftrightarrow \frac{a + b\overline{c}\,\overline{c}}{|a + b\overline{c}\,\overline{c}|} = \frac{a + b}{|a + b|}.$$

Ponieważ zbiór liczb zespolonych postaci

$$a + b\overline{c}\,\overline{c} \quad \text{dla} \quad |c| = 1$$

tworzy okrąg o środku a i promieniu $|b|$, to zbiór liczb zespolonych postaci

$$\frac{a + b\overline{c}\,\overline{c}}{|a + b\overline{c}\,\overline{c}|} \quad \text{dla} \quad |c| = 1$$

tworzy łuk okręgu o środku 0 i promieniu 1. Stąd ostatnia równość w powyższym ciągu równoważności jest możliwa wtedy i tylko wtedy, gdy $b = 0$. Ponieważ przekształcenie L jest niezerowe, to $a \neq 0$.

4. Mówimy, że funkcja zespolona f jest w danym punkcie *konforemna* (S. Saks, A. Zygmund (1959), rozdział V; B.W. Szabat (1974), rozdział IV; W. Rudin (1986), rozdział 14; F. Leja (1977), rozdział IV), jeżeli jej pochodna jest w tym punkcie różna od zera. Dwa obszary płaszczyzny zespolonej są *konforemnie równoważne* (S. Saks, A. Zygmund (1959), rozdział V; B.W. Szabat (1974), rozdział IV; W. Rudin (1986), rozdział 14; F. Leja (1977), rozdział X), jeżeli istnieje funkcja wzajemnie jednoznaczna jednego obszaru na drugi, która jest konforemna w punktach pierwszego obszaru. Można pokazać, że wtedy funkcja odwrotna jest również konforemna w punktach drugiego obszaru. Twierdzenie Riemanna mówi, że każdy obszar (nie będący płaszczyzną), który jest homeomorficzny z otwartym kołem jednostkowym, jest również z nim konforemnie równoważny. Z twierdzenia Liouville'a wynika, że przypadek całej płaszczyzny musi być wykluczony (każda funkcja ograniczona i różniczkowalna na całej płaszczyźnie zespolonej jest stała).

W kolejnych paragrafach przedstawimy i omówimy własności najważniejszych funkcji konforemnych określonych na całej płaszczyźnie (funkcja wykładnicza, przekształcenia liniowe) lub na płaszczyźnie bez skończonej liczby punktów (przekształcenia homograficzne).

5. W. Rudin w pierwszym zdaniu prologu *Real and Complex Analysis* pisze: *Funkcja wykładnicza jest najważniejszą funkcją w matematyce*. Funkcję *wykładniczą* w analizie zespolonej określa się w ten sam sposób, co w analizie rzeczywistej (S. Saks, A. Zygmund (1959), rozdział I; B.W. Szabat (1974), rozdział I; W. Rudin (1986), prolog; F. Leja (1977), rozdział III) – za pomocą szeregu lub ciągu:

$$\exp(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!},$$

$$\exp(z)=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n.$$

Funkcja wykładnicza, podobnie jak jej odpowiednik w analizie rzeczywistej, jest równa swojej pochodnej zespolonej

$$\exp(z)'=\exp(z).$$

Spełnia ona równanie funkcyjne

$$\exp(z_1+z_2)=\exp(z_1)\exp(z_2).$$

Można ją również przedstawić w postaci trygonometrycznej

$$\exp(z)=\exp(x)[\cos y+i\sin y],$$

gdzie $z = x + iy$. Stąd wynika, że funkcja wykładnicza nie ma pierwiastków i jest okresowa, z urojonym okresem podstawowym $2\pi i$.

Funkcja wykładnicza odwzorowuje konforemnie płaszczyznę na płaszczyznę bez jednego punktu. Przekształca ona układ kartezjański (x, y) na układ biegunowy

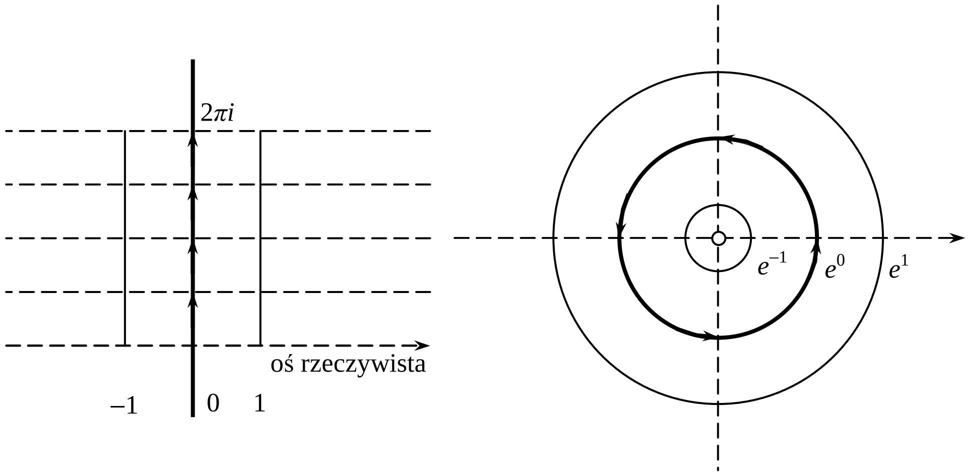
$$(\delta,\phi):\quad \delta(x,y)=\exp(x),\quad \phi(x,y)=y.$$

Na rysunku 1 przedstawiona jest siatka kartezjańska i jej obraz przy odwzorowaniu wykładniczym – siatka biegunowa. Pas

$$\{x+yi:\ x\in R, 0\le y<2\pi\}$$

odwzorowany jest wzajemnie jednoznacznie na płaszczyznę z usuniętym środkiem układu współrzędnych.

Funkcja wykładnicza przekształca również prostą przechodzącą przez początek układu współrzędnych, która nie jest osią tego układu, na spiralę logarytmiczną. Oczywiście kąty, pod jakimi ta prosta przecina proste $y = y_0$ i $x = x_0$ oraz odpowiednia spirala logarytmiczna przecina półprostą $\phi = y_0$ i okrąg $\delta = \exp(x_0)$, są jednakowe. A wszystko to wynika z faktu, że funkcja wykładnicza jest konforemna.



Rys. 1. Siatka współrzędnych kartezjańskich (po lewej stronie) i jej obraz przy odwzorowaniu wykładniczym – siatka współrzędnych biegunowych (po prawej stronie)

6. Przekształcenie wzajemnie jednoznaczne płaszczyzny zespolonej postaci

$$\xi = az + b, \quad \text{gdzie} \quad a \neq 0,$$

nazywamy przekształceniem *liniowym* (S. Saks, A. Zygmund (1959), rozdział I; W. Rudin (1986), rozdział 14; F. Leja (1977), rozdział IV).

Każde przekształcenie liniowe jest złożeniem następujących przekształceń:

– przesunięć: $z \to z + b$,
– obrotów: $z \to az$, $|a| = 1$,
– podobieństw: $z \to rz$, $r > 0$.

Przekształcenia liniowe mają następujące własności:

(1) tworzą grupę (ze względu na złożenie),

(2) przekształcają okrąg i prostą odpowiednio na okrąg i prostą,

(3) są jedynymi przekształceniami różnowartościowymi i konforemnymi płaszczyzny.

7. Jeżeli do płaszczyzny zespolonej C dodamy nowy punkt zwany ∞, to otrzymany zbiór nazywa się *płaszczyzną zespoloną domkniętą* (S. Saks, A. Zygmund (1959), rozdział V; W. Rudin (1986), rozdział 13; F. Leja (1977), rozdział II). Prostą w płaszczyźnie zespolonej z dodanym punktem ∞ nazywa się *okręgiem niewłaściwym* płaszczyzny zespolonej domkniętej (S. Saks, A. Zygmund (1959), rozdział V; F. Leja (1977), rozdział II). Dwa punkty płaszczyzny zespolonej domkniętej nazywa się *symetrycznymi względem okręgu* C (S. Saks, A. Zygmund (1959), rozdział V; F. Leja (1977), rozdział II), jeżeli się pokrywają i leżą na tym okręgu lub jeśli każdy okrąg przechodzący przez te dwa punkty jest ortogonalny do okręgu C, czyli przecina ten okrąg pod kątem prostym. Nietrudno zauważyć, że w przypadku, gdy okrąg jest niewłaściwy, czyli jest prostą, definicja ta jest równoważna definicji symetrii względem prostej.

Przekształceniem *homograficznym* (S. Saks, A. Zygmund (1959), rozdział V; B.W. Szabat (1974), rozdział I; W. Rudin (1986), rozdział 14; F. Leja (1977), rozdział IV) nazywamy przekształcenie płaszczyzny zespolonej domkniętej postaci

$$\xi = \frac{az+b}{cz+d},$$

gdzie: a, b, c, d są liczbami zespolonymi takimi, że $ad - bc \neq 0$. Jeśli $c \neq 0$, to punkt $-d/c$ przechodzi w punkt ∞, a punkt ∞ w punkt a/c. Warunek $ad - bc \neq 0$ nakładamy po to, by wyeliminować przypadek zdegenerowania w stałą, gdy licznik jest proporcjonalny do mianownika.

Każde przekształcenie homograficzne jest złożeniem przekształceń następujących typów: przesunięć, obrotów, podobieństw oraz inwersji zdefiniowanej następująco:

– inwersja: $z \to 1/z$.

Przekształcenia homograficzne mają następujące własności:

(1) tworzą grupę (ze względu na złożenie),

(2) przekształcają okrąg na okrąg (być może niewłaściwy),

(3) ich niezmiennikiem jest symetria względem okręgu – jeżeli punkty p, q są symetryczne względem okręgu C i jeżeli przy przekształceniu homo-

graficznym punkty te przechodzą odpowiednio na punkty p_1, q_1 oraz okrąg C na okrąg C_1, to punkty p_1, q_1 są symetryczne względem okręgu C_1,

(4) są jedynymi przekształceniami różnowartościowymi i konforemnymi płaszczyzny, z której usunięto skończoną liczbę punktów.

Ad (1). Przekształcenie odwrotne względem przekształcenia homograficznego jest również homograficzne. Sprawdzamy to, wyrażając z przez ξ; otrzymujemy

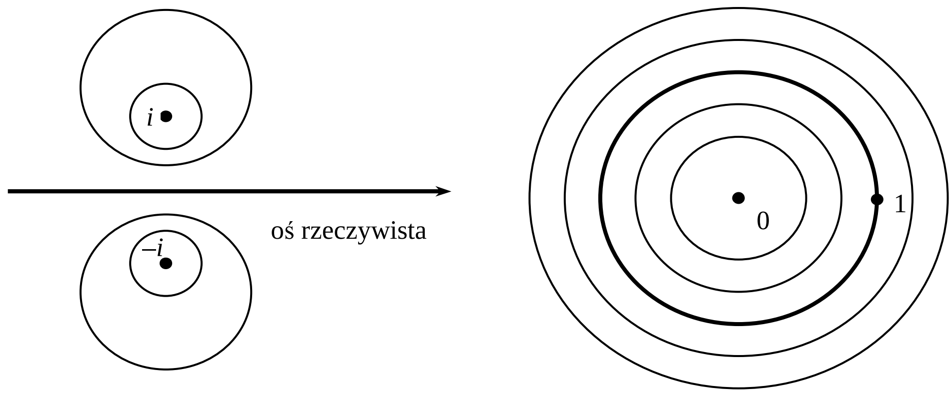
$$z = \frac{-d\xi + b}{c\xi - a}.$$

Podobnie sprawdzamy łatwo, że złożenie dwóch przekształceń homograficznych jest przekształceniem homograficznym.

Ad (2). Wystarczy sprawdzić, że inwersja przekształca okrąg na okrąg.

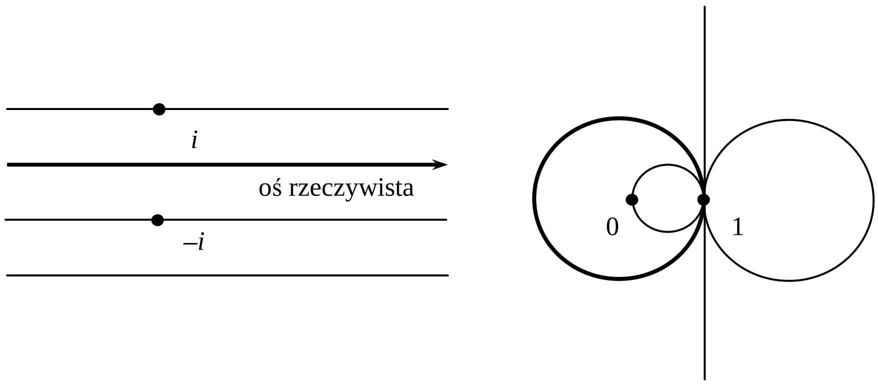
Rozważmy dla przykładu homografię

$$\xi = \frac{z-i}{z+i}, \quad \xi(\infty) = 1.$$



Rys. 2. Okręgi, względem których są symetryczne punkty i, $-i$ (po lewej stronie) i ich obrazy przez homografię $\xi = \dfrac{z-i}{z+i}$ (po prawej stronie)

Ponieważ obrazem punktów i, $-i$ są odpowiednio punkty 0, ∞, a te ostatnie są symetryczne względem okręgów o środku w początku układu, to przeciwobrazem tych okręgów są okręgi „pawie oczka", względem których są symetryczne punkty i, $-i$. W szczególności przeciwobrazem okręgu $\{z\colon |z| = 1\}$ jest prosta rzeczywista (rys. 2).



Rys. 3. Proste równoległe do prostej rzeczywistej (po lewej stronie) i ich obrazy przez homografię $\xi = \dfrac{z-i}{z+i}$ (po prawej stronie)

Obrazem prostych równoległych do prostej rzeczywistej są okręgi styczne do okręgu $\{z\colon |z| =1\}$ w punkcie 1 (rys. 3).

Literatura

F. Leja (1977). *Funkcje zespolone*. PWN. Warszawa.
W. Rudin (1986). *Analiza rzeczywista i zespolona*. PWN. Warszawa.
S. Saks, A. Zygmund (1959). *Funkcje analityczne*. PWN. Warszawa.
B.W. Szabat (1974). *Wstęp do analizy zespolonej*. PWN. Warszawa.