D I D A C T I C S O F M A T H E M A T I C S

No. 5-6 (9-10) 2009

**Jan Florek, Jacek Juzwiszyn,**
**Andrzej Misztal, Jerzy Sacała**
(Wrocław)

# O CIĄGU ULAMA, RÓWNANIU PELLA I ROTACJACH RYNKU FINANSOWEGO

**Abstract:** We present a history of finance modeling and propose Ulam sequence as a tool in finance modeling. We prove that if $x_1 = x_2 = x_3 = 1$ and $x_{n+3} = x_{n+2} + x_n$, $n \geq 1$, then a sequence $x_{n+1}/x_n$ has a limit which is a real root of the equation $t^3 - t^2 - 1 = 0$.

**Key words:** Black-Scholes model, option price, Ulam sequence, periodic continued fraction, Pell equation.

## 1. Wstęp

W globalnym świecie wszyscy jesteśmy uczestnikami rynku. Uczestnictwo to wyrażane jest poprzez nasze ilościowe decyzje dotyczące dóbr, a związane jest z wielkością ich produkcji, zakupu, zbytu – z nierzadkim uwzględnieniem aktualnej kondycji gospodarczej rynku. Na stan kondycji rynku istotny wpływ mają takie wielkości, jak podaż i popyt, a również inflacja i bezrobocie. Wszystkich czynników, które wpływają na rozmiary wymienionych powyżej wielkości, jest bardzo dużo. Zgłębianiem oraz porównywaniem ich szacunkowych rynkowych wartości zajmują się m.in. analitycy giełdowi. Główne starania analityków giełdowych mają na celu przewidzenie przyszłych notowań walorów giełdowych. Wykorzystywane i stosowane przez analityków giełdowych różne metody prognostyczne mają wspólny rodowód. Można powiedzieć, że ich początek sięga roku 1900. Trzydziestoletni wówczas Louis Bachelier (student słynnego matematyka i fizyka Henriego Poincare'a) w swojej rozprawie doktorskiej, zatytułowanej *Théorie de la spéculation*, położył podwaliny do stworzenia matematycznego modelu rynku finansowego. Założył m.in., że ceny walorów giełdowych mają charakter losowy. Bazując na tym założeniu, wyprowadził wzór na dystrybuantę procesu stochastycznego zwanego (od lat sześćdziesiątych XX wieku) jako proces Norberta Wienera[1]. Dodatkowo Bachelier jest autorem wzoru na cenę opcji, gdy cena akcji ulega zmianie zgodnie z procesem Wienera, jak również wzoru na tzw. cenę opcji z barierą. Ruchem cen akcji w modelu Bacheliera, podobnie jak ruchem cząstek cieczy i gazów, rządzi przypadkowość. Równanie opisujące ruch cząstek Browna wyprowadzili niezależnie od siebie Albert Einstein w 1905 r. i Marian Smoluchowski w roku 1906. Jednak trzeba było czekać ponad siedemdziesiąt lat, by po odkryciach Bacheliera, bazując m. in. na jego wynikach, para uczonych: fizyk i matematyk Fischer Black oraz ekonomista Myron Scholes, stworzyła matematyczny model rynku finansowego, znanego w literaturze jako model Blacka-Scholesa[2]. Ów model zyskał szybko powszechną akceptację po spektakularnym sukcesie wyceny tzw. opcji europejskiej. Opcja europejska jest kontraktem, który swojemu posiadaczowi daje prawo (ale nie obowiązek) kupienia (lub sprzedania) giełdowych akcji po ustalonej cenie (tzw. cenie realizacji). W matematycznym modelu rynku finansowego ceny akcji są opisywane przez procesy stochastyczne, a celem modelowania jest znalezienie wielkości ceny opcji na giełdowe akcje. W modelu Blacka-Scholesa kluczowe okazują się dwa założenia. Pierwsze – że na rynku finansowym znajdującym się w stanie tzw. względnej równowagi (minimalnej rotacji – stabilizacji wirowej3) nie istnieje możliwość generowania dodatnio procentowego zysku z zerowego kapitału. Mówiąc inaczej, jeśli istnieje strategia inwestowania w papiery wartościowe, które mogą przynieść zysk, nawet gdy zaczynamy inwestować bez żadnych środków, to strategia taka musi być obarczona dużym ryzykiem poniesienia strat. Drugie z kluczowych założeń modelu dotyczy wyboru takiej klasy procesów stochastycznych, które opisują ceny giełdowych akcji. Połączenie powyższego założenia z chaotycznym charakterem cen instrumentów finansowych, znanego dzisiaj jako proces Wienera z dryfem, umożliwiło Blackowi i Scholesowi napisanie równania różniczkowego, które spełnia cena opcji europejskiej $F(t, s)$ z warunkiem końcowym $F(T, x) = H(x)$

[1] Proces ten jest również powszechnie nazywany ruchem Browna.

[2] Za badania, jakie przeprowadzili, Myron Scholes i Robert Merton otrzymali w 1997 r. Nagrodę Nobla z ekonomii. Fischer Black zmarł dwa lata wcześniej, ale według powszechnej opinii, gdyby żył, byłby trzecim laureatem tej prestiżowej nagrody.

[3] Nazwa „stabilizacja wirowa” dotyczy ekonomicznych zjawisk wirowych rozpatrywanych w 3D.

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t,x)+rx\frac{\partial F}{\partial s}(t,x)+\frac{1}{2}\sigma^2 x^2\frac{\partial^2 F}{\partial s^2}(t,x)-rF(t,x)=0.$$

W powyższym równaniu $t$ oznacza czas, a $T$ jest czasem realizacji opcji (podkreślenia wymaga jednak to, że interesuje nas takie rozwiązanie równania, w którym $t < T$). Zmienna $x$ oznacza cenę akcji, a $H(x)$ funkcję wypłaty z opcji w chwili $T$. Stała $\sigma^2$ jest wariancją procesu opisującego ceny giełdowych akcji, a $r$ jest stopą procentową. W równaniu Blacka-Scholesa dwie rzeczy są zadziwiające. Pierwszą jest to, że nie występuje w nim współczynnik dryfu procesu Wienera. Współczynnik ten opisuje średni zysk z akcji, co oznacza, że *dobrą* cenę opcji można wyznaczyć bez wiedzy o tym, czy akcje przynoszą zyski, czy straty. Drugą natomiast jest fakt, że powyższe równanie można rozwiązać analitycznie, co nie jest częstym zjawiskiem dla klasy równań różniczkowych cząstkowych. Dla europejskiej opcji kupna akcji $S$ za cenę $K$ w chwili $T$, odpowiadającej wypłacie

$$H(S(T))=\max(S(T)-K,\ 0),$$

zachodzi poniższy wzór na cenę opcji w chwili 0:

$$F(0,S(0))=S(0)N(d_1(S(0),T))-Ke^{-r(T)}N(d_2(S(0),T)).$$

W powyższym wzorze pojawia się $N(x)$; jest to dystrybuanta rozkładu normalnego a

$$d_{1,2}(S,T)=\frac{\ln(S/K)+(r\pm\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}.$$

W latach pięćdziesiątych ubiegłego wieku matematyką finansową zaczęli się interesować również polscy wybitni matematycy, przebywający w tamtych czasach w Stanach Zjednoczonych. Być może zainteresowanie to wywołała wydana w 1946 r. książka Clarence'a H. Richardsona *Financial Mathematica*. Z opublikowanego w 1982 r. raportu (Wywiad (1982)) wynika, że Stanisław Ulam, uczeń m.in. Hugona Steinhausa i Kazimierza Kuratowskiego, podczas swojej pracy nad konstrukcją bomby wodorowej w Los Alamos w interesujący sposób zmodyfikował rekurencję Fibonacciego, wprowadzając do ciągu elementy losowości. Mitchell Feigenbaum opublikował w 1982 r. wywiad ze Stanisławem Ulamem i Markiem Kacem, którego cytowany poniżej fragment dotyczy modyfikacji rekurencji znanej dzisiaj jako ciąg Ulama.

*MK – Stan wymyśla zagadnienia i hipotezy w najszybszym chyba tempie na świecie. Trudno jest znaleźć w tym kogoś tej samej klasy. Wiele z nich omawiamy wspólnie. Z jednym przyszedł raz i powiedział: „Popatrz, wymyśliłem następującą modyfikację liczb Fibonacciego". Przy zwykłych liczbach Fibonacciego zaczynasz od* 1 *i* 1*, następnie je dodajesz otrzymując* 2 *jako trzeci wyraz ciągu. Potem dodajesz* 2 *do* 1 *otrzymując* 3*, potem* 3 *i* 2*, co daje* 5*, etc. Innymi słowy,* $(n+1)$*-szy wyraz ciągu jest sumą n-tego wyrazu i* $(n–1)$*-go. Symbolicznie* $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ *przy* $a_1 = a_2 = 1$*. Według pomysłu Stana, wzór na* $a_{n+1}$ *byłby teraz* $a_{n+1} = a_n$ + *któryś z* $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ *wzięty zprawdopodobieństwem* $1/n$*. Mój Boże, to jest ciekawe jako rozmowa przy kawie, ale z jakiegoś dziwnego powodu to mnie tak wzięło, że zacząłem nad tym pracować. Znalazłem nawet średnie* $a_n$ *i nawet wariancję. A wariancja dana jest straszliwym wzorem zawierającym pierwiastek kwadratowy z* 17*. To się nawet ukazało jako raporcik wydany w Los Alamos. Spędziłem nad tym prawdopodobnie najmniej tydzień ciężkiej pracy. Dlaczego? Nie mam pojęcia, poza tym, że nie mogłem zostawić w spokoju tej przeklętej rzeczy.*

*SU – To, co zrobiłeś z regułą typu Fibonacciego, jest piękną robotą i ma pewna prostotę, tak jak sam problem. A rozwiązanie było nieoczekiwane, bo* $a_n$ *rośnie wykładniczo nie z n, lecz z pierwiastkiem kwadratowym z n.*

*MK – Z pierwiastkiem kwadratowym z n ze skomplikowanym współczynnikiem. Jest w tym pewna myśl, gdyż budując ciąg na każdym etapie musisz znać wszystkie poprzedzające wyrazy – wysoce niemarkowskie zagadnienie…*

W analizie technicznej rynków finansowych, zauważono że różne ciągi Ulama opisują liczby okresów wzrostów i spadków cen giełdowych akcji przypadkowo wybranych spółek. Być może jest tak, że dla ustalonych z góry przedziałów czasowych wybranej spółki giełdowej zawsze istnieje ciąg Ulama, opisujący liczby cenowych ruchów spółki. Znawcom matematyki finansowej oraz analitykom giełdowym znana jest książka R.N. Elliotta *The Wave Principle,* wydana 1938 r., w której autor do opisu liczby okresów wzrostów i spadków cen akcji używa ciągu Fibonacciego oraz złotej liczby $\Phi \approx 0{,}618$. Nie wiemy, czy Ulam znał treści artykułów publikowanych przez *Financial World Magazine w* 1939 r., a dotyczących wykorzystania rekurencji Fibonacciego do opisów rozwoju rynków finansowych. Faktem jest jednak to, że twórcze zainteresowanie się rekurencją Fibonacciego u Ulama pojawiło się w tym samym czasie, kiedy to Elliotowska intuicyjna teoria fal święciła swoje największe sukcesy.

Marek Kac, polski matematyk, jest również znany w matematyce finansowej jako jeden z autorów tzw. wzoru Feynmana-Kaca, służącego do wyceny opcji giełdowych $C(0)$. Założył on m.in., że dynamikę cen akcji można przedstawić za pomocą równania:

$$dS(t) = aS(t)dt + \sigma S(t)dW(t).$$

W chwili $T$ cena $C(T) = (S(T) - K)^+$, przyjmując następnie oznaczenia $x = S(0)$, Kac wyprowadził wspólnie z Feynmanem wzór pozwalający wyliczyć wartość

$$C(0) = u(0, x) = E((S(T) - K)^+),$$

gdzie $u$ jest rozwiązaniem równania

$$\frac{\partial u}{\partial t} + ax\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

W zbiorze $(-\infty, T) \times \mathrm{R}$ z warunkiem końcowym $u(T, x) = (x - K)^+$.

W cytowanym wywiadzie Kac wspomina o straszliwym wzorze na wariancję zmiennych losowych Ulama. Jak to się okaże w dalszej części artykułu, istnieje jeszcze inny sposób wyprowadzenia wzoru na $\sigma^2$.

Inną bardzo ciekawą własnością, jak dotychczas nie wyznaczoną[4], jest

$$\lim(u_{n+1}/u_n) = ?$$

Iloraz ten w przypadku ciągów Fibonacciego i Lucasa odgrywa fundamentalną rolę w intuicyjnej teorii fal Elliotta i jak wiadomo jego wartość jest zbieżna do złotej liczby, przy pomocy której próbuje się określać ekstremalne poziomy wzrostów i spadków wartości giełdowych akcji, jak również długości przedziałów czasowych hossy i bessy.

Dla ciągu Fibonacciego:

$$f_1 = f_2 = 1,$$

$$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n,$$

$$\lim(f_{n+1} / f_n) = 1/\Phi = 1{,}618\ldots,$$

$$\lim(f_n / f_{n+1}) = \Phi = 0{,}618\ldots;$$

[4] Przynajmniej wynik taki nie jest znany autorom.

dla ciągu Lucasa:

$$l_n = f_{n\text{-}1} + f_{n+1},$$

$$\lim(l_{n+1} / l_n) = 1/\Phi = 1{,}618\ldots,$$

$$\lim(l_n / l_{n+1}) = \Phi = 0{,}618\ldots;$$

dla ciągu „tribonacciego”:

$$t_{n+3} = f_{n+2} + f_{n+1} + f_n,$$

$$\lim(t_{n+1} / t_n) = 1{,}839,$$

$$\lim(t_n / t_{n+1}) = 0{,}544;$$

dla ciągu „tetranacciego”:

$$T_{n+4} = f_{n+3} + f_{n+2} + f_{n+1} + f_n,$$

$$\lim(T_{n+1} / T_n) = 1{,}927,$$

$$\lim(T_n / T_{n+1}) = 0{,}519.$$

Wszystkie z powyższych znanych ilorazów są podstawowymi proporcjami analizy technicznej rynków finansowych.

Na początku XX wieku Polacy nie mieli wielkich tradycji matematycznych. Stan ten na szczęście błyskawicznie się zmienił. Stało się tak za sprawą pracy zespołu matematyków związanych z Uniwersytetem Jana Kazimierza we Lwowie. Najwybitniejszą postacią lwowskiej szkoły matematycznej był Stefan Banach – twórca analizy funkcjonalnej. Jednym z czołowych przedstawicieli owego niezwykle twórczego grona, był również Stanisław Ulam, który w 1935 r. otrzymał zaproszenie do Princeton University w Stanach Zjednoczonych. Po rocznym pobycie na tym uniwersytecie dostał propozycję pracy na Harvardzie i skorzystał z niej. W tym czasie każde wakacje spędzał w Polsce. Ostatni jego pobyt w rodzinnym Lwowie miał miejsce latem roku 1939. W czasie pracy w Los Alamos Ulam miał okazję współpracować z wybitnymi uczonymi – byli wśród nich: Richard Feynman, Robert Oppenheimer, Enrico Fermi, George Gamow, John von Neumann. Ostatni z wymienionych uczonych trzykrotnie przybywał do Lwowa z misją przekonania Stefana Banacha do wyjazdu do pracy w Stanach Zjednoczonych. Wiadomo, że czynił to na polecenie wymienionego wcześniej Norberta Wienera. Jak podaje Józef Kozielecki (J. Kozielecki (1999)), Banach podczas rozmowy z von Neumannem latem 1937 r. zapytał wprost: *Ile dolarów proponuje profesor Wiener za pracę w kierowanym przez niego instytucie?* Von Neumann z zadowoleniem odpowiedział – *Proszę, oto czek,* *na którym profesor Wiener wpisał jedynkę i poprosił, żeby dopisał pan tyle zer, ile uzna za stosowne.* Banach uśmiechnął się ironiczne i odpowiedział – *To za mała suma, aby opuścić Polskę … za mała*.

Po nieudanych próbach von Neumanna, związanych z przekonaniem Banacha do opuszczenia Polski, po raz kolejny próbował tego samego Ulam. Jak pokazują zgromadzone i opublikowane dokumenty (E. Jakimowicz, A. Mironowicz (2009)) wydawać by się mogło, że Ulam był bardzo bliski sprowadzenia Banacha do USA. Tak jednak się nie stało. Dzisiaj można tylko gdybać o tym, jak rozwinęłaby się matematyka finansowa owych czasów, gdyby wymienionej trójce naukowców (Wiener, von Neumann, Ulam) udało się skutecznie nakłonić Banacha do wyjazdu do USA i zainteresować raczkującą wówczas matematyką finansową.

Próby badania granicy

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}$$

doprowadziły, w jednym z przypadków, do równania diofantycznego, zwanego równaniem Pella. Równanie to z kolei wiąże się ściśle z pojęciem ułamka łańcuchowego i jego reduktów, więc poniżej przybliżamy ten temat.

## 2. O równaniu Pella

Ułamkiem łańcuchowym nieskończonym (W. Narkiewicz (1977)) nazywamy każdy nieskończony ciąg liczb całkowitych $\langle a_0;\ a_1,\ a_2, \ldots\rangle$, w którym elementy $a_i$ są dla $i \geq 1$ liczbami naturalnymi. Liczby $a_1$, $a_2$, … nazywamy mianownikami ułamka łańcuchowego. Poniższy ułamek nieskracalny $\frac{P_k}{Q_k}$ nazywamy jego $k$-tym reduktem

$$\frac{P_k}{Q_k} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 \ldots + \cfrac{1}{a_k}}}},$$

a granicę $\lim_{k\to\infty}\frac{P_k}{Q_k}$ jego wartością (W. Narkiewicz (1977), lemat 8.2). Redukty ułamka łańcuchowego wyznacza się za pomocą następujących wzorów rekurencyjnych (W. Narkiewicz (1977), twierdzenie 8.1):

$$P_{-1} = 1, \quad Q_{-1} = 0, \tag{1}$$
$$P_0 = a_0, \quad Q_0 = 1,$$
$$P_{k+1} = a_{k+1}P_k + P_{k-1}, \quad Q_{k+1} = a_{k+1}Q_k + Q_{k-1}$$

dla $k = 0, 1, \ldots$

Każda liczba niewymierna $\alpha$ ma jednoznaczne rozwinięcie w ułamek łańcuchowy (W. Narkiewicz (1977), twierdzenie 8.2). Mianowniki tego ułamka można otrzymać za pomocą wzorów rekurencyjnych:

$$\alpha_0 = \alpha, \tag{2}$$
$$\alpha_{k+1} = \frac{1}{\alpha_k - [\alpha_k]},$$
$$a_k = [\alpha_k]$$

dla $k = 0, 1, \ldots$ (nawias [ ] oznacza tu część całkowitą).

Ułamek łańcuchowy $\langle a_0;\ a_1,\ a_2, \ldots\rangle$ nazywamy okresowym, jeżeli istnieją liczby naturalne $k$, $m$ takie, że $a_{n+m} = a_n$ dla $n \geq k$. Ułamek łańcuchowy okresowy będziemy oznaczać w następujący sposób:

$$\langle a_0; a_1, \ldots, a_{k-1}, \overline{a_k, a_{k+1}, \ldots, a_{k+m-1}}\rangle.$$

Liczbę niewymierną nazywamy liczbą algebraiczną stopnia 2, jeśli jest pierwiastkiem równania kwadratowego o współczynnikach całkowitych. Euler i Lagrange udowodnili (I. Niven, H.S. Zuckerman, H.L. Montgomery (1991), twierdzenie 7.19), że liczba niewymierna $\alpha$ jest liczbą algebraiczną stopnia 2 wtedy i tylko wtedy, gdy jest wartością ułamka łańcuchowego okresowego.

**Przykład 1.** Złota liczba Greków $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ jest dodatnim rozwiązaniem równania kwadratowego $x = 1 + \frac{1}{x}$. Stąd wynika, że $\frac{\sqrt{5}+1}{2} = \langle 1; \overline{1}\rangle$. Ponieważ wszystkie mianowniki $a_k$ rozwinięcia złotej liczby w ułamek łańcuchowy są równe 1, to na mocy wzorów rekurencyjnych (1) mamy

$$P_0 = P_1 = 2, \quad P_{k+1} = P_k + P_{k-1} \quad \text{dla } k \geq 1,$$

oraz

$$Q_0 = Q_1 = 1, \quad Q_{k+1} = Q_k + Q_{k-1} \quad \text{dla } k \geq 1.$$

Wobec tego ciągi liczników oraz ciągi mianowników reduktów rozwinięcia złotej liczby w ułamek łańcuchowy okresowy są ciągami Fibonacciego.

**Przykład 2.** Liczba $\sqrt{2}-1$ jest dodatnim rozwiązaniem równania kwadratowego $x = \frac{1}{2+x}$. Stąd wynika, że $\sqrt{2} = \langle 1; \overline{2} \rangle$.

Wzory rekurencyjne (2) wyznaczają rozwinięcie liczby niewymiernej w nieskończony ułamek łańcuchowy. Jednak w przypadku liczb postaci $\sqrt{d}$, gdzie $d$ jest liczbą niekwadratową (nie będącą kwadratem liczby całkowitej), istnieje bardziej użyteczna procedura rozwijania liczby $\sqrt{d}$ w ułamek łańcuchowy okresowy. Jest ona zdefiniowana za pomocą następujących wzorów rekurencyjnych:

$$m_0 = 0, \quad q_0 = 1, \quad a_k = \left[\frac{m_k + \sqrt{d}}{q_k}\right], \tag{3}$$

$$m_{k+1} = a_k q_k - m_k, \qquad q_{k+1} = \frac{d - m_{k+1}^2}{q_k}$$

dla $k \geq 0$.

Poniższe twierdzenie (4) (I. Niven, H.S. Zuckerman, H.L. Montgomery (1991), twierdzenie 7.21) pokazuje, że wzory rekurencyjne (3) wyznaczają również długość $r$ okresu rozwinięcia liczby $\sqrt{d}$ w ułamek łańcuchowy okresowy.

$$\sqrt{d} = \langle a_0; \overline{a_1, a_2, \dots, a_{r-1}, 2a_0} \rangle. \tag{4}$$

Ponadto w równaniu (3) mamy $q_k = 1 <=> r \mid k$ .

**Przykład 3.** Wyznaczymy rozwinięcie liczby $\sqrt{19}$ w ułamek łańcuchowy okresowy. Na mocy wzoru (3) otrzymujemy ciąg następujących obliczeń:

$$m_0 = 0, \quad q_0 = 1, \quad a_0 = 4,$$
$$m_1 = 4, \quad q_1 = 3, \quad a_1 = 2,$$
$$m_2 = 2, \quad q_2 = 5, \quad a_2 = 1,$$
$$m_3 = 3, \quad q_3 = 2, \quad a_3 = 3,$$
$$m_4 = 3, \quad q_4 = 5, \quad a_4 = 1,$$
$$m_5 = 2, \quad q_5 = 3, \quad a_5 = 2,$$
$$m_6 = 4, \quad q_6 = 1, \quad a_6 = 8.$$

Stąd, na mocy wzoru (4), mamy $\sqrt{19} = \langle 4; \overline{2, 1, 3, 1, 2, 8} \rangle$.

Równanie diofantyczne

$$x^2 - dy^2 = n,$$

gdzie $d$, $n$ są danymi liczbami naturalnymi, nazywa się równaniem Pella.

Niech

$$\frac{s_k}{t_k}$$

będzie $k$-tym reduktem rozwinięcia liczby $\sqrt{d}$ w ułamek łańcuchowy okresowy oraz niech $r$ będzie okresem tego rozwinięcia, jak w równaniu (4). Lagrange udowodnił, że jeśli $d$ jest liczbą naturalną niekwadratową, to równanie $x^2 - dy^2 = 1$ ma nieskończenie wiele rozwiązań w liczbach naturalnych (I. Niven, H.S. Zuckerman, H.L. Montgomery (1991), twierdzenie 7.25). Dokładniej:

**Twierdzenie 1.** *Wszystkie naturalne rozwiązania równania*

$$x^2 - dy^2 = \pm 1$$

*są reduktami rozwinięcia liczby* $\sqrt{d}$ *w ułamek łańcuchowy okresowy. Jeżeli okres r jest parzysty, to równanie* $x^2 - dy^2 = -1$ *nie ma rozwiązań, a wszystkie naturalne rozwiązania równania* $x^2 - dy^2 = 1$ *są postaci* $x = s_{nr-1}$, $y = t_{nr-1}$ *dla* $n = 1, 2, 3, \dots$ *Jeżeli okres r jest nieparzysty, to* $x = s_{nr-1}$, $y = t_{nr-1}$ *dają wszystkie naturalne rozwiązania równania* $x^2 - dy^2 = -1$ *dla* $n = 1, 3, 5, \dots$ *i wszystkie naturalne rozwiązania równania* $x^2 - dy^2 = 1$ *dla* $n = 2, 4, 6, \dots$

**Przykład 4.** Ponieważ $\sqrt{19} = \langle 4; \overline{2,1,3,1,2,8} \rangle$, więc na mocy twierdzenia (5) najmniejsze naturalne rozwiązanie równania $x^2 - 19y^2 = 1$ jest postaci $x = s_5$, $y = t_5$, gdzie $\frac{s_5}{t_5}$ jest piątym reduktem ułamka łańcuchowego $\langle 4, \overline{2,1,3,1,2,8} \rangle$. Za pomocą wzorów (1) wyznaczamy kolejno pięć reduktów:

$$\frac{9}{2}, \frac{13}{3}, \frac{48}{11}, \frac{61}{14}, \frac{170}{39}.$$

Stąd $x = 170$, $y = 39$ jest najmniejszym naturalnym rozwiązaniem równania

$$x^2 - 19y^2 = 1.$$

Zauważmy, że na mocy twierdzenia 1 równanie

$$x^2 - 19y^2 = -1$$

nie ma naturalnych rozwiązań, gdyż okres rozwinięcia $\langle 4, \overline{2,1,3,1,2,8} \rangle$ jest parzysty.

Wszystkie naturalne rozwiązania równania $x^2 - dy^2 = \pm 1$ wyrażają się przez najmniejsze z tych rozwiązań (I. Niven, H.S. Zuckerman, H.L. Montgomery (1991), twierdzenie 7.26):

**Twierdzenie 2.** *Przypuśćmy,* że $x^2 - dy^2 = -1$ *ma rozwiązanie. Jeżeli* $x_1$, $y_1$ *są najmniejszymi naturalnymi rozwiązaniami równania*

$$x^2 - dy^2 = -1,$$

*to* $x_2$, $y_2$ *zdefiniowane przez*

$$x_2 + y_2\sqrt{d} = \left(x_1 + y_1\sqrt{d}\right)^2$$

*są najmniejszymi naturalnymi rozwiązaniami* $x^2 - dy^2 = 1$. *Wszystkie naturalne rozwiązania równania* $x^2 - dy^2 = -1$ *są wyznaczone przez* $x_n$, $y_n$, *gdzie*

$$x_n + y_n\sqrt{d} = \left(x_1 + y_1\sqrt{d}\right)^n,\ n = 1, 3, 5, 7, \ldots;$$

*a wszystkie naturalne rozwiązania równania* $x^2 - dy^2 = 1$ *są wyznaczone przez* $x_n$, $y_n$, *gdzie* $x_n + y_n\sqrt{d} = \left(x_1 + y_1\sqrt{d}\right)^n$, *dla* $n = 2, 4, 6, 8, \ldots$

## 3. Ciągi Ulama

Jeżeli ciąg Ulama jest ciągiem Fibonacciego:

$$x_1 = x_2 = 1, \quad x_{n+2} = x_{n+1} + x_n,$$

to

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = g,$$

gdzie $g$ jest dodatnim pierwiastkiem równania $t^2 - t - 1 = 0$ (Przykład 1). Natomiast jeżeli ciąg Ulama jest ciągiem arytmetycznym:

$$x_{n+1} = x_n + 1,$$

to

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1.$$

**Przykład 5.** Przykładem ciągu Ulama, dla którego nie istnieje granica

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n},$$

jest następujący ciąg:

$\underline{1, 1}$, $\underline{2, 3}$, 4, $\underline{5, 8}$, 9, 10, 11, 12, $\underline{13, 21}$, 22, …, $\underline{34, 55}$, …

W ciągu tym występują wszystkie wyrazy ciągu Fibonacciego połączone w pary (podkreślenie), a między każdą parą są kolejne liczby naturalne. Dla takich par sąsiednich wyrazów granica równa się $g = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Dla pozostałych par jest równa 1.

**Twierdzenie 3.** *Jeżeli ciąg Ulama jest zdefiniowany przez rekurencję*:

$$x_1 = x_2 = 1, \quad x_{2n+1} = x_{2n} + x_{2n-1}, \quad x_{2n+2} = x_{2n+1} + x_{2n-1}, \quad n \geq 1,$$

*to*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{2n}}{x_{2n-1}} = \sqrt{2}, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{x_{2n+1}}{x_{2n}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}},$$

*oraz para* $(x, y) = (x_{2n}, x_{2n-1})$, $n \geq 1$, *jest rozwiązaniem równania Pella*

$$x^2 - 2y^2 = (-1)^n.$$

**Dowód.** Udowodnijmy najpierw równość

$$\left(1+\sqrt{2}\right)^n = x_{2n} + x_{2n-1}\sqrt{2}, \quad \text{dla } n \geq 1. \tag{5}$$

Równanie jest oczywiście spełnione dla $n = 1$. Ponadto jeżeli

$$\left(1+\sqrt{2}\right)^n = x_{2n} + x_{2n-1}\sqrt{2},$$

to

$$\left(1+\sqrt{2}\right)^{n+1} = \left(1+\sqrt{2}\right)^n\left(1+\sqrt{2}\right) =$$

$$= (x_{2n} + x_{2n-1}\sqrt{2})\left(1+\sqrt{2}\right) = (x_{2n} + 2x_{2n-1}) + (x_{2n} + x_{2n-1})\sqrt{2} =$$

$$= x_{2n+2} + x_{2n+1}\sqrt{2}.$$

Na mocy twierdzenia 2 i wzoru (5) para $(x, y) = (x_{2n}, x_{2n-1})$ jest rozwiązaniem równania Pella

$$x^2 - 2y^2 = (-1)^n.$$

Ponieważ sprzężenie iloczynu jest iloczynem sprzężeń, to na mocy wzoru (5) otrzymujemy:

$$\left(1-\sqrt{2}\right)^n = x_{2n} - x_{2n-1}\sqrt{2}, \quad \text{dla } n \geq 1.$$

Zauważmy, że $\left|1-\sqrt{2}\right| < 1$, więc $\lim_{n->\infty}\left(1-\sqrt{2}\right)^n = 0$. Stąd dostajemy

$$\lim_{n->\infty}\left(x_{2n} - x_{2n-1}\sqrt{2}\right) = 0.$$

A więc

$$\lim_{n->\infty} \frac{x_{2n}}{x_{2n-1}} = \sqrt{2} \quad \text{oraz} \quad \lim_{n->\infty} \frac{x_{2n+1}}{x_{2n}} = \lim_{n->\infty} \frac{x_{2n}+x_{2n-1}}{x_{2n}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

**Twierdzenie 4.** *Jeżeli ciąg Ulama jest zdefiniowany przez rekurencję:*

$$x_1 = x_2 = x_3 = 1, \quad x_{2n+3} = x_{2n+2} + x_{2n}, \quad n \geq 1,$$

*to*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{2n+2}}{x_{2n+1}} = a,$$

*gdzie a jest rzeczywistym pierwiastkiem równania* $t^3 - t^2 - 1 = 0$.

**Dowód.** Niech $a$, $b$, $c$ będą różnymi zespolonymi pierwiastkami równania $t^3 - t^2 - 1 = 0$ oraz $y_n = pa^n + qb^n + rc^n$, gdzie $p$, $q$, $r$ są ustalonymi liczbami rzeczywistymi. Ponieważ

$$y_{n+3} - y_{n+2} - y_n = pa^n\left(a^3 - a^2 - 1\right) + qb^n\left(b^3 - b^2 - 1\right) + rc^n\left(c^3 - c^2 - 1\right) = 0,$$

to oba ciągi $x_n$, $y_n$, $n \geq 1$, spełniają to samo równanie rekurencyjne. Jeśli dobierzemy $p$, $q$, $r$ tak, aby $x_i = y_i$ dla $i = 1, 2, 3$, to ciągi te będą identyczne. W tym celu rozwiązujemy metodą Cramera poniższy układ:

$$p + q + r = 1, \quad pa + qb + rc = 1, \quad pa^2 + qb^2 + rc^2 = 1,$$

i otrzymujemy:

$$p = \frac{(1-b)(1-c)}{(a-b)(a-c)}, \quad q = \frac{(1-a)(1-c)}{(b-a)(b-c)}, \quad r = \frac{(1-b)(1-a)}{(c-a)(c-b)}.$$

Niech $f(t) = t^3 - t^2 - 1$. Mamy $f'(t) = 3t^2 - 2t = 3t\left(t - \frac{2}{3}\right)$, więc $t = 0$ jest maksimum lokalnym funkcji. Ponadto $f(0) = -1 < 0$, więc $f(t)$ ma tylko jeden pierwiastek rzeczywisty $a$. Pozostałe $b$, $c$ są sprzężonymi liczbami zespolonymi. Ponieważ $f(1) = -1 < 0 < 3 = f(2)$, więc $a > 1$. Ze wzorów Viete'a mamy $abc = 1$, więc dostajemy

$$|b| = |c| = \sqrt{bc} = \sqrt{1/a} < 1 < a. \tag{6}$$

Wobec tego

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{pa^{n+1} + qb^{n+1} + rc^{n+1}}{pa^n + qb^n + rc^n}.$$

Jeśli podzielimy licznik i mianownik przez $a^n$ i skorzystamy z nierówności (6), to otrzymamy $\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n} = a = 1{,}465...$

### Literatura


E. Drabik (2007). *Ciąg liczbowy Ulama i jego zastosowanie na rynkach finansowych*. Przegląd Statystyczny. Nr 54, 4. Str. 19-33.

E. Jakimowicz, A. Mironowicz (2009). *Stefan Banach. Niezwykłe życie i genialna matematyka*. Uniwersytet Gdański Listy Stefana Banacha do Stanisława Ulama. Str. 41-67.

J. Kozielecki (1999). *Banach – geniusz ze Lwowa*. Odra. Nr 1.

W. Narkiewicz (1977). *Teoria liczb*. PWN. Warszawa.

I. Niven, H.S. Zuckerman, H.L. Montgomery (1991). *An Introduction to the Theory of Numbers*. John Wiley & Sons Inc. New York.

Wywiad (1982). *Reflections of Polish masters. An interview with Stan Ulam and Mark Kac by Mitchell Feigenbaum*. Los Alamos. No 3, 54. Tłumaczenie polskie*: Refleksje polskich mistrzów – wywiad ze Stanisławem Ulamem i Markiem Kacem przeprowadzony przez Mitchella Feigenbauma*. Wiadomości Matematyczne 31 (1993). Str. 93-114.