

**MATEMATYKA, MATEMATYKA FINANSOWA  
I INŻYNIERIA FINANSOWA REALIZOWANE  
NA KIERUNKACH EKONOMICZNYCH  
W ŚWIETLE OBOWIĄZUJĄCYCH  
STANDARDÓW NAUCZANIA**

**Anna Górska, Dorota Koziół-Kaczorek**

**Abstract.** Problems associated with the implementation of mathematical subjects on the Faculty of Economic Sciences (Warsaw University of Life Sciences) are presented in this paper. These subjects are mathematics, financial mathematics and financial engineering. The presented considerations are based on the experience gained during lectures and exercises listed direction of study: Economics, Management, Logistics, Finance and Accounting.

**Keywords:** financial mathematics, financial engineering, teaching standards, core curriculum, economic studies.

## **1. Wstęp**

W niniejszym artykule zostaną przedstawione problemy związane z realizacją programów przedmiotów matematycznych na Wydziale Nauk Ekonomicznych Szkoły Głównej Gospodarstwa Wiejskiego w Warszawie. Prezentowane rozważania są oparte na doświadczeniach zdobytych w czasie prowadzenia wykładów i ćwiczeń na kierunkach Ekonomia, Zarządzanie, Finanse i Rachunkowość oraz Logistyka. Na wymienionych kierunkach I stopień (licencjacki) obejmuje sześć semestrów, II stopień (magisterski) obejmuje cztery semestry. Wymagany program przedmiotów takich jak matematyka, matematyka finansowa, inżyniera finansowa oraz liczba godzin przeznaczonych na ich realizację powodują, że studenci nie tylko nie mogą otrzymać pełnej wiedzy z wymienionych dziedzin metod ilościowych, ale również nie mają możliwości trenowania i utrwalenia zdobytych wiadomości. Obowiązujące minima programowe, które zostały określone

---

**Anna Górska, Dorota Koziół-Kaczorek**

Department of Economics of Agriculture and International Economic Relations, Warsaw University of Life Sciences, Nowoursynowska 166 Street, 02-787 Warszawa, Poland

E-mail: [anna\\_gorska@ssgw.pl](mailto:anna_gorska@ssgw.pl), [dorota.koziol@ssgw.pl](mailto:dorota.koziol@ssgw.pl)

w standardach nauczania, powinny uwzględniać w swych założeniach zintegrowany system wiedzy. Jednak często nie zapewniają ciągłości i koordynacji treści nauczania. Kolejne przedmioty „matematyczne” są powiązane ze sobą, ale są wprowadzane w dużych odstępach czasu (kilka semestrów). Słaba kondycja kandydatów na studentów z zakresu matematyki szkoły średniej, nieumiejętność analitycznego myślenia oraz bardzo słabe czytanie ze zrozumieniem dodatkowo utrudniają proces nauczania.

## **2. Charakterystyka realizowanych przedmiotów matematycznych**

Matematyka, jak podaje Encyklopedia PWN, jest to nauka dostarczająca narzędzi do otrzymywania ścisłych wniosków z przyjętych założeń. Ponieważ ścisłe założenia dotyczą różnych dziedzin myśli ludzkiej, a muszą być czynione w naukach ścisłych, technice, a nawet w naukach humanistycznych, zakres zastosowań matematyki jest szeroki i stale się powiększa. Pierwszym przedmiotem „matematycznym” na kierunkach ekonomicznych (i nie tylko) jest właśnie matematyka. Podczas nauki tego przedmiotu student spotyka się z matematyką teoretyczną (nazywaną czasami matematyką czystą), która jest często przedstawiana bez wyraźnego związku z konkretnymi zastosowaniami. Jednak duży nacisk położony jest na matematykę stosowaną, wykorzystywaną jako narzędzie w innych dziedzinach wiedzy. Dla studentów kierunków ekonomicznych jest szczególnie ważne poznanie aparatu matematycznego wykorzystywanego w ekonomii.

Matematyka finansowa jest dziedziną wiedzy, która ma szczególne znaczenie w ekonomii rynkowej. Powinna ona stanowić teoretyczne narzędzie do kwantytatywnego opisu pomnażania kapitału w gospodarowaniu (Dobija, Smaga, 1996). Wiąże się z elementarną teorią wartości, jej rachunkiem w aspekcie dynamicznym, który wymaga uwzględnienia zmieniającej się wartości pieniądza wraz z upływem czasu. W gospodarce rynkowej pieniądź jest główną siłą sprawczą wszelkich działań. Zatem w obecnym czasie istnieje duże zapotrzebowanie na wiedzę niezbędną do podejmowania optymalnych decyzji w warunkach skomplikowanego mechanizmu rynkowego. Nie wystarcza tylko dobra znajomość funkcjonowania rynku, duże znaczenie ma także dostępność do informacji i umiejętność ich przetwarzania w odpowiedni zbiór reguł decyzyjnych. Znajomość matematyki finansowej jest niezbędna nie tylko specjalistom z bankowości i finansów, ale również tym wszystkim, którzy zajmują się dziedzinami praktyki i studiów związanych z gospodarką rynkową (m.in. mikro- i makroekonomią, zarządzaniem, rachunkowością, marketingiem) (Sobczyk, 2001).

Inżynieria finansowa jest dziedziną nowoczesnych finansów, która dostarcza narzędzi do modelowania i prognozowania zdarzeń na rynkach finansowych oraz do ilościowego zarządzania ryzykiem związanym z inwestycjami finansowymi. Jest ona dziedziną nauki bazującą na wiadomościach z zakresu matematyki finansowej, finansów, zastosowań matematyki oraz metod informatyki i ekonometrii. Jej celem jest analiza instrumentów pochodnych rynku finansowego, budowa złożonych strategii inwestycyjnych, prognozowanie cen instrumentów finansowych, projektowanie, analizowanie i tworzenie instrumentów finansowych oraz ich wycena, zarządzanie ryzykiem inwestycji finansowych. Inżynieria finansowa rozumiana może być również jako sposób finansowania przedsięwzięć gospodarczych, w których wykorzystywane są różne kombinacje instrumentów, form i instytucji finansowych (Weron, Weron, 2005).

W ramach programu studiów przedmiot matematyka realizowany jest na kierunkach:

a. Ekonomia:

- studia stacjonarne – rok I (semestr 1) studiów I stopnia w wymiarze 60 godzin (30 godzin wykładów, 30 godzin ćwiczeń);
- studia niestacjonarne – rok I (semestr I) studiów I stopnia w wymiarze 60 godzin (36 godzin wykładów, 18 godzin ćwiczeń; 6 godzin projektów);

b. Zarządzanie:

- studia stacjonarne – rok I (semestr 1) studiów I stopnia w wymiarze 60 godzin (30 godzin wykładów, 30 godzin ćwiczeń);
- studia niestacjonarne – rok I (semestr I) studiów I stopnia w wymiarze 45 godzin (27 godzin wykładów, 18 godzin ćwiczeń);

c. Finanse i Rachunkowość:

- studia stacjonarne – rok I (semestr 1) studiów I stopnia w wymiarze 60 godzin (30 godzin wykładów, 30 godzin ćwiczeń);
- studia niestacjonarne – rok I (semestr I) studiów I stopnia w wymiarze 36 godzin (18 godzin wykładów, 18 godzin ćwiczeń);

d. Logistyka:

- studia stacjonarne – rok I (semestr 1) studiów I stopnia w wymiarze 60 godzin (30 godzin wykładów, 30 godzin ćwiczeń);
- studia niestacjonarne – rok I (semestr I) studiów I stopnia w wymiarze 36 godzin (18 godzin wykładów, 18 godzin ćwiczeń).

W ramach programu studiów przedmiot matematyka finansowa realizowany jest na kierunku Finanse i Rachunkowość:

- studia stacjonarne – rok III (semestr 5) studiów I stopnia w wymiarze 30 godzin (15 godzin wykładów, 15 godzin ćwiczeń);

- studia niestacjonarne – rok III (semestr 5) studiów I stopnia w wymiarze 18 godzin (9 godzin wykładów, 9 godzin ćwiczeń);

W ramach programu studiów przedmiot inżynieria finansowa realizowany jest na kierunku Finanse i Rachunkowość:

- studia stacjonarne – rok I (semestr 2) studiów II stopnia w wymiarze 30 godzin (15 godzin wykładów, 15 godzin ćwiczeń);

- studia niestacjonarne – rok I (semestr 2) studiów II stopnia w wymiarze 28 godzin (9 godzin wykładów, 9 godzin ćwiczeń, 9 godzin projektów).

Obowiązujące standardy nauczania wskazują, iż studenci wymienionych kierunków na przedmiocie matematyka powinni zrealizować materiał z zakresu algebry liniowej, analizy matematycznej oraz rachunku prawdopodobieństwa. Cały materiał powinien być poparty przykładami zastosowania w ekonomii, zarządzaniu itp.

W przypadku przedmiotu matematyka finansowa (realizowanego tylko na kierunku Finanse i Rachunkowość) standardy nauczania obejmują następujące zagadnienia: stopy procentowe, stopa zwrotu, wartość pieniądza w czasie, kapitalizacja, dyskontowanie, rachunek rent, kredyty, wycena instrumentów dłużnych, składki jednorazowe netto i składki bieżące w ubezpieczeniach na życie.

W przypadku inżynierii finansowej (realizowanej także tylko na kierunku Finanse i Rachunkowość; brak jednoznacznego określenia minimum w standardach nauczania) program zajęć (najczęściej autorski) powinien obejmować m.in.: instrumenty pochodne będące przedmiotem obrotu na rynku kapitałowym i towarowym w kraju i za granicą, metodykę ich wyceny oraz sposoby wykorzystania w zarządzaniu ryzykiem rynkowym i inwestycyjnym.

### 3. Problemy

Realizowane na uczelniach minima programowe powinny w swych założeniach uwzględniać zintegrowany system wiedzy. W rzeczywistości jednakże okazuje się, że niestety nie ma ani ciągłości, ani koordynacji treści nauczania. Następujące po sobie przedmioty „matematyczne” są powiązane pod względem treści, ale są wprowadzane w nadmierne odstępach czasu (nawet kilku semestrów). To wszystko sprawia, że studenci nie przywołują z pamięci potrzebnych informacji, ale za każdym razem muszą się uczyć pewnych zagadnień od nowa. I za każdym razem są to dla nich trudne za-

gadnienia. W takich przypadkach nie można zrobić czegoś więcej na zajęciach ani dokładniej, bo nie ma przygotowanego podłoża i nie ma na to czasu. Tu pojawia się kolejny problem – liczba godzin przeznaczona na te przedmioty. Przy tych minimach i kondycji studentów godzin jest zdecydowanie za mało. Nie ma czasu na zrealizowanie, nawet bardzo pobieżnie, tego wszystkiego, co przewidują standardy nauczania, a już na pewno nie ma czasu na dokładniejsze przetrenowanie ze studentami trudniejszych partii materiału. W grupach bardzo wyraźnie widać zróżnicowanie poziomu studentów. Pojedyncze jednostki są w stanie w miarę sprawnie nadążać z materiałem, reszta pozostaje w tyle. Jest też spora grupa studentów, których zniechęca fakt, że nie rozumieją opracowywanego materiału, przestają więc pracować na zajęciach. Potwierdzeniem tego zjawiska jest bardzo wysoki odsetek studentów, którzy mają problemy z zaliczeniem przedmiotu i ze zdaniem egzaminu.

Kolejnym problemem jest poziom wiedzy z zakresu matematyki szkoły średniej, jaki prezentują kandydaci na studentów. Ponadto trudności sprawia również nieumiejętność analitycznego myślenia oraz czytania ze zrozumieniem. Braki te wychodzą na każdym zajęciach. Studenci, zamiast próbować dążyć i rozwiązywać problem, albo czekają, aż im się poda to rozwiązanie, albo usiłują sobie przypomnieć, jak to kiedyś było rozwiązane.

Inżynieria finansowa, jak już wspomniano, to przedmiot nauczany na studiach II stopnia (magisterskich). Zakłada się, że student rozpoczynający naukę na tych studiach posiada wiedzę z zakresu odpowiadających studiów I stopnia. Jednak studenci w niektórych przypadkach są absolwentami innych kierunków niż ekonomiczne czy matematyczne. W programie tych studiów nie pojawia się matematyka ani przedmioty „matematyczne”, jak np. statystyka czy matematyka finansowa. Student zatem, zanim zacznie poszerzać swoją wiedzę z zakresu inżynierii finansowej, musi najpierw zapoznać się z zakresem wiedzy z tych przedmiotów. Musi to zrobić we własnym zakresie, co okazuje się często zbyt trudne.

#### **4. Integracja z innymi przedmiotami**

W nauczaniu przedmiotów „matematycznych” korzysta się z metod/pojęć poznanych np. na statystyce (opisowej czy matematycznej). Zilustrujmy to przykładem.

W inżynierii finansowej, rozumianej często jako rozszerzenie matematyki finansowej, korzysta się ze wzorów np. na wycenę opcji europejskiej<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup> Opcja giełdowa to metoda zabezpieczania ceny kupna lub sprzedaży instrumentu bazo-

(Ford, 1997). Bardzo popularny model Blacka-Scholesa oraz jego rozszerzenia można stosować do wyceny europejskiej opcji kupna i sprzedaży akcji, indeksów giełdowych, walut oraz kontraktów futures. Zakłada się, że ceny akcji podlegają błędzeniu przypadkowemu i rozkład zmian cen w przyszłości jest rozkładem logarytmiczno-normalnym.

Wzór Blacka-Scholesa dotyczący opcji europejskich kupna wygląda następująco (Jajuga, 2004):

$$C = S\Phi(d_+) - Fe^{-rT}\Phi(d_-),$$

dla opcji sprzedaży zaś:

$$P = Fe^{-rT}\Phi(-d_-) - S\Phi(-d_+),$$

gdzie:  $S$  – cena instrumentu bazowego (spot), na który wystawiona jest opcja;  $F$  – cena wykonania opcji;  $T$  – czas pozostający do wygaśnięcia opcji (w latach);  $\Phi(d)$  – wartość dystrybuanty standardowego rozkładu normalnego dla argumentu  $d$ ;  $d_+$ ,  $d_-$  określone są następująco

$$d_{\pm} = \frac{\ln \frac{S}{F} + (r \pm \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}, \quad d_- = d_+ - \sigma\sqrt{T},$$

$r$  – stopa procentowa wolna od ryzyka;  $\sigma$  – zmienność cen akcji (odchylenie standardowe dla stóp zwrotu).

Jak można zauważyć, do wyceny opcji na inżynierii finansowej stosuje się narzędzia, pojęcia ze statystyki opisowej, a także statystyki matematycznej, nie wspominając o podstawowych pojęciach z matematyki finansowej. Trudnością okazuje się sprawdzenie przez studentów, czy spełnione są podstawowe założenia stosowalności tego modelu, a mianowicie zweryfikowanie hipotezy dotyczącej rozkładu logarytmiczno-normalnego. Pojawia się także często pytanie, jak wygląda rozkład logarytmiczno-normalny. Trudnością okazują się również pojawiające się pojęcie „dystrybuanty standardowego rozkładu normalnego dla argumentu  $d$ ” oraz odchylenia standardowe. Nie wszyscy studenci potrafią poprawnie zinterpretować wspomniane pojęcia.

---

wego (akcji) przed niepożądanymi zmianami. Opcja jest to umowa między nabywcą (posiadaczem) a sprzedawcą (wystawcą) dająca nabywcy prawo, a nie obowiązek, do kupna (opcja kupna) lub sprzedaży (opcja sprzedaży) instrumentu bazowego przed lub w ustalonym dniu w przyszłości po określonej cenie w zamian za opłatę. Opcja europejska (*European option*) może być zrealizowana tylko w dniu, na który przypada termin wygaśnięcia.

Takie przykłady jak powyższy można mnożyć prawie w nieskończoność. Najważniejsze jest to, aby przekonać studentów, a także uczniów szkół średnich czy nawet gimnazjalnych, że zdobyte wcześniej podstawy są w następnych latach niezbędne do kontynuowania nauki na kolejnych etapach.

### **Literatura**

- Dobija M., Smaga E. (1996). *Podstawy matematyki finansowej i ubezpieczeniowej*. PWN. Warszawa-Kraków.
- Ford D. (1997). *Opcje giełdowe. Metody i strategie*. Wydawnictwo K.E. LIBER. Warszawa.
- Jajuga K., Jajuga T. (2004). *Inwestycje. Instrumenty finansowe. Ryzyko finansowe. Inżynieria finansowa*. Wydawnictwo Naukowe PWN. Warszawa.
- Sobczyk M. (2001). *Matematyka finansowa. Podstawy teoretyczne, przykłady, zadania*. Agencja Wydawnicza Placet. Warszawa.
- Weron A., Weron R. (2005). *Inżynieria finansowa*. Wydawnictwo Naukowo-Techniczne. Warszawa.